Matière : Mathématique	**Série 2 : Compléments d'analyse**	**Professeur** : M. Sylla
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Niveau** : TS1

Exercice 1 :

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donner l'expression de sa dérivée et vérifier que pour tout réel x : $2f'(x)\sqrt{1+x^2} = f(x)$.

2) En déduire la relation $4(1 + x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$, pour tout réel x.

Exercice 2 :

Soit l'application f définie sur I= $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{cosx}$

1) Montrer que f est bijection de I sur un intervalle K à déterminer.

2) Etablir que f^{-1} est dérivable sur K et donner l'expression de f^{-1}.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = x – cosx

1) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution x_0 et que $x_0 \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right[$.

2) Démontrer qu'il existe un réel c $\in \left]x_0; \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) f'(c)$.

3) Montrer que $f'(c) > \frac{3}{2}$ et en déduire que $\frac{\pi + 4\sqrt{2}}{12} < x_0 < \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4 :

Cet exercice traite la convergence de la suite (U_n) définie pour n≥ 1 par : $U_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$ (appelée une série Riemann de terme général $\frac{1}{k^3}$) par l'application de la formule des accroissements finis.

Soit l fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^2}$

1) En appliquant à φ le théorème de l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[p\ ;\ p+1]$, p étant un entier strictement positif, montrer que :

$$\frac{2}{(p+1)^3} < \varphi(p) - \varphi(p+1) < \frac{2}{p^3}$$

En déduire que :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

2) a)Etudier les variations de la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$ et démontrer qu'elle est convergente.

b) Donner un encadrement de la limite L de (U_n) .

NB : Montrer de la même façon que la série de Riemann de terme général $\frac{1}{k}$ est divergente.

Exercice 5 :

Une fonction numérique f est dite lipchitzienne de rapport k $(k \in \mathbb{R}_+^*)$ sur un intervalle I lorsque

Pour tout (x, y) ∈ I^2, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Montrer que, en utilisant l'inégalité des accroissements finis que :

1) La fonction cosinus est lipchitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport 1.
2) a)la fonction logarithme népérien est lipchitzienne sur $I = [1, +\infty[$ de rapport 1.

   b) En déduire que, pour tout (a, b)∈ I^2, tel que $0 < a < b$, on a : $1 - \frac{b}{a} \leq lnb - lna \leq \frac{b}{a} - 1$.

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - e^{-x}$

1) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule, α , sur ℝ et que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

2) Soit (U_n) la suite définie par la donnée de U_0 et par la relation $U_{n+1} = e^{-U_n}$, pour tout n∈ ℕ.

Démontrer que, quel que soit U_0 , pour tout entier n supérieur ou égal à 3 , U_n est élément de $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

3) En utilisant les accroissements finis, prouver qu'il existe un réel k ∈]0 , 1[tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a : $|U_n - \alpha| < k|U_n - \alpha|$; en déduire que la suite (U_n) converge vers α.

PROBLEME :

Partie A :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par :

$g(x) = ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. On pose $\mathrm{V}(x) = g(x) + \frac{1}{2}x^4$, $\forall x \in \mathrm{I}$.

1) Etudier les variations de g et de V (il ne sera pas nécessaire de calculer les limites aux bornes de g et de V).

2) En déduire que, $\forall x \in \mathrm{I}$, $-\frac{1}{2}x^4 \leq g(x) \leq 0$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x - ln(1+x)}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

On note (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2cm).

1)a) Vérifier, pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$, que $f(x) = -\frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$.

b) En utilisant l'inégalité trouvée en A.2), démontrer que f est dérivable en 0 et donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

c) f est-elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.

2) Soit h la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2ln(1+x)$

a) Etudier le sens de variations de h ; calculer $h(0)$ et en déduire le signe de h sur$]-1\,;\,+\propto[$.

b) Démontrer que pour tout x $\in]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\propto[$, on a $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$.

c) Dresser le tableau de variation complet de f .

3) Construire (C) et la tangente (T) (On précisera les asymptotes de (C)).

Partie C :

1) a) Démontrer que la fonction w définie sur $]-1\,;\,+\propto[$ par : $w(x) = f(x) - x$ est continue et strictement décroissante.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]-1\,;\,+\propto[$ et que $\frac{1}{4} < \alpha < 1$.

2) a) Sachant que pour tout $x \geq 0$ $on\ a :$ $x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x)$, démontrer alors que pour tout $x \geq 0$ $on\ a :$ $\frac{-1}{1+x} \leq f'(x) \leq 0$; puis pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}\,;1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{5}$;

(On pourra utiliser les résultats de B.2).

b) Démontrer que si $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ $alors$ $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1$.

3) On définit la suite (V_n) par : $V_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $V_{n+1} = f(V_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4} \leq V_n \leq 1$.

b) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|V_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5}|V_n - \alpha|$; puis que , $\forall n \in \mathbb{N}$, $|V_n - \alpha| \leq \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

c) En déduire que la suite (V_n) converge et déterminer sa limite .

d) Déterminer le plus petit entier n_0 possible tel que, $\forall\ n \geq n_0$, V_n soit une valeur approchée de α à 10^{-1} près .