TS1 : LA PROBABILITE :

EXERCICE 1 :

1. Résoudre dans ℕ :
$A_n^4 = n^4 - 6n^3 + 10n^2 - 5$; $C_n^{n-2} = 10$
$A_n^3 = n^3 - 3n - 12$; $C_n^4 = \frac{14}{3}C_n^n$, $C_{3x+2}^{x+1} = C_{3x+2}^{x^2+2x-8}$
2. Soit n et p deux entiers naturels tels que : $2 \leq p \leq n$. Démontrer l'égalité :
$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$
3. Soit n et p deux entiers naturels tels que : $p \leq n$

a- Démontrer l'égalité : $\frac{1}{p+1}C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$

b- Ecrire plus simplement le réel : $A = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$

c- Résoudre dans ℕ : $C_n^5 = C_n^7$, $C_{n-1}^{n-5} = 3C_{n-3}^{n-7}$

4. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On en extrait n boules simultanément.

a- Combien de résultats peut – on obtenir.
Soit p un entier naturel, $0 \leq p \leq n$.

b- Démontrer que $(C_n^0)^2$ résultats ne comportent pas de boules blanches.

c- Démontrer que $(C_n^1)^2$ résultats comportent une seule boule blanche.

d- Démontrer que $\left(C_n^p\right)^2$ comportent exactement p boules blanches.

e- Calculer la somme :
$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$

EXERCICE 2 :

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun des nombres bulbes donnant des tulipes de couleurs variées. La probabilité qu'une bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$

La probabilité qu'une bulbe du lot donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$. Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$.

On définit les événements suivants :

A : « le jardinier a choisi le lot 1 »

B : « Le jardinier a choisi le lot 2 »

J_n : « le jardinier obtient n tulipe jaunes »

1. Dans cette question on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a- Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir des 50 bulbes du lot 1 ?

b- Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c- Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

d- Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes.

2. Probabilités conditionnelles

a- Montrer que : $P_B(J_n) = \binom{50}{n}2^{-50}$

b- En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c- On note p_n la probabilité $p(A/B)$.
Etablir que : $p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$

d- Pour quelles valeurs de n a – t – on $p_n > 0,9$? Comment peut – on interpréter ce résultat ?

EXERCICE 3 :

Une boite contient 60 boules blanches et 40 boules noires.
On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage.
On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche.

A. Dans cette partie on ira au maximum à 4 tirages. On appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche. Par convention X sera égal à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après 4 tirages.

1. Calculer la probabilité pour que X soit égale à 0.
2. Calculer la probabilité pour que X soit égal à k, k valant successivement 1, 2, 3 et 4.

B. Dans cette partie on procédera à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul.
De même, on appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche et X sera égale à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après n tirages.

1. Calculer la probabilité pour que X soit égale à k, k valant successivement de 1 à n.
2. On considère le polynôme f tel que :
$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$.
Soit $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Montrer que $E(X) = \frac{3}{5}f\left(\frac{2}{5}\right)$
3. On sait que pour tout réel x différent de 1, on a :
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

a- En dérivant les deux termes de l'égalité précédente, en déduire une autre expression de la fonction $f(x)$.

b- En déduire que : $E(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$

EXERCICE 4 :

Le téléphone portable de Babou contient en mémoire un répertoire de 1500 chansons dont 700 sont dans la catégories mbalax, 100 dans la catégories zouk, 200 dans la catégorie techno et 500 dans la catégories taxourane. Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable.

40% des chansons sont interprétées en sérère et 28% de la catégories mbalax sont interprétées en sérère. Au cours de son footing journalier, Babou écoute une chanson grâce à ce mode de « lecture aléatoire ». On note :

M l'événement : « la chanson écoutée est de la catégorie mbalax »,

S l'événement « la chanson écoutée est interprétée en Sérère ».

1. Calculer la probabilité $p(M)$ de M
2. Déterminer $p(S)$ et $p(S/M)$
3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie mbalax interprétée en Sérère
4. Calculer alors la probabilité $p(M/S)$
5. En fait, Babou écoute de cette manière une chanson de son répertoire lors de son footing le matin, à la prise de son petit déjeuner, sur le chemin de l'école, au déjeuner et le soir avant d'aller au lit.
   Son cousin Bachir, fin mathématicien, lui dit qu'il a $[496 \times (0{,}4)^3]$% des chances d'écouter au moins trois chansons sérère à la fin de la journée. Dire en justifiant si Bachir a raison ou pas.

EXERCICE5 :

PARTIE A :

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches ?
2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer 2 boules de même couleur.

a- Montrer que : $p(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n)$. Interpréter le résultat.

PARTIE B :

Pour les questions suivantes n= 4.

1. Calculer la probabilité $p(4)$.
2. Un tirage consiste à tirer et simultanément 2 boules de l'urne. Un joueur effectue 2 tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les boules tirées la première fois. Il mise au départ la somme de 30 francs
   Pour chaque tirage : Si les 2 boules sont de la même couleur, il reçoit 40 francs, si elles sont de couleurs différentes, il reçoit 5 francs.
   On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des 2 tirages, entre la somme reçue par le joueur et la mise initiale. Il peut être positif ou négatif.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a- Quelles sont les valeurs prises par X ?

b- Déterminer la loi de probabilité de X.

c- Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 6 :

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain obtenu par le joueur.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a- Démontrer que : $p(X=1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$

b- Calculer en fonction de n, la probabilité correspondant aux autres valeurs prises par la variable aléatoire X.

c- Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut : $E(X) = \frac{-6n^2-14n+360}{(n+1\,0)(n+9)}$

d- Déterminer les valeurs de n pour les quelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier naturel n afin que la probabilité d'avoir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.
3. On suppose que $n = 1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges. Le joueur ne sait que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche. Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaire pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi : pour tout $k \in IN$,
   $p(Z \leq k) = \int_0^k \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x}\, dx.$
   On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

a- Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour obtenir une boule blanche soit $p(Z \leq 50)$.

b- Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule une boule blanche » sachant l'évènement : « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

EXERCICE 7 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.

U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble des ces opérations constitue une épreuve. On note : B_1 l'évènement :

« on a tiré une boule blanche dans l'urne U_1»

N_1 l'évènement :

« on a tiré une boule noire dans U_1 »

B_2 l'évènement :

« on a tiré une boule blanche dans U_2 »

N_2 l'évènement :

« on a tiré une boule noire dans U_2 ».

1. Calculer les probabilités suivantes : $p(B_1)$, $p(N_1)$, $p(B_2/B_1)$, $p(N_2/B_1)$, $p(B_2/N_1)$, $p(N_2/N_1)$
2. Montrer que la probabilité de l'évènement B_2 est égale à $\frac{3k+6}{4k+12}$.

   Dans la suite on suppose que $k = 12$.
3. Une joueur mise 8 euros et effectue une épreuve. Si à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, il reçoit 12 euros, sinon il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est – à – dire la différence entre la somme reçue et la mise initiale.

a- Donner les valeurs prises par X

b- Donner la loi de probabilité de la variable X

c- Calculer l'espérance mathématique de X.

d- Le jeu est – il favorable au joueur ?

4. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu. Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 boules noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire. Ainsi les épreuves successives sont indépendantes Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 soit supérieure ou égale 0,99.

EXERCICE 8 :

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire Sn qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale. On estime que l'espérance mathématique de Sn notée E(Sn) est égale à 10.

Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité $P(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier naturel tel que : 0 ≤ k ≤n
2. Etablir l'égalité $ln[P(S_n = 0)] = -10 \times \frac{ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$.

   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = e^{-10}$
3. Démontrer que : $P(S_n = k+1) = P(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1}$ où est un entier naturel tel que 0≤k≤n-1
4. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = k) = e^{-10}\frac{10^k}{k!}$ alors on a également : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = k+1) = e^{-10}\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}$
5. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = k) = e^{-10}\frac{10^k}{k!}$ tel que $0 \leq k \leq n$.
6. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $e^{-10}\frac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $P(Sn = k)$. Utiliser cette approximation pour 10^{-4} prés la probabilité pour qu'au cours de cette année il y'ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

EXERCICE 9 :

On dispose deux urnes U_1 et U_2 contenant les boules indiscernables au toucher. U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires ($n \geq 1$). U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire. On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constituent une épreuve.

1. On considère l'évènement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

a- Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A peut s'écrire : $p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

b- Déterminer la limite de $p(A)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère l'évènement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ». Vérifier que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B peut s'écrire : $p(B) = \frac{6}{4(n+3)}$

3. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans l'urne U_2.

- Si U_2 contient une seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ francs ;
- Si U_2 contient deux boules blanches, le joueur reçoit n francs ;
- Si U_2 contient trois boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a- Expliquer pourquoi le joueur n'a pas intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.

Dans la suite, on suppose $n > 10$ et on considère la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).

b- Déterminer la loi de probabilité de X.

c- Calculer l'espérance mathématique de X.

On dit que le jeu est favorable au jour si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive.

d- Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

EXERCICE 10 :

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 On désigne par pk la probabilité d'obtenir, lors d'un lancers la face numérotée k. Ce dé est pipé de sorte que pour a $1 \leq k \leq 6$ et telle que :

- $p_1, p_2, \dots, p_6$ soit dans cet ordre en progression arithmétique de raison r
- p_1, p_2, p_3 et p_4 sont dans cet ordre en progression géométrique

1. Démontrer que la probabilité d'apparition de la face k est $p_k = \frac{k}{21}$ pour tout entier naturel $k \in [1;6]$

2. On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :

A : « le nombre obtenu est pair »

B : « Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 ».

C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

a- Déterminer la probabilité de l'évènement A

b- Déterminer la probabilité de l'évènement et celle de l'événement C.

Les événements A et B sont – ils indépendants ?

Les événements A et C sont – ils indépendants ?

3. Définir l'évènement $A \cap B$.

4. Déterminer $P_B(A)$.

5. On lance ce dé cinq fois de suite. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux fois un nombre pair.

6. On considère deux urnes U_1 et U_2 :

U_1 contient 2 boules blanches et 5 boules noires et U_2 contient 1 boule blanche et 2 boules noires.

Une expérience se déroule de la manière suivante : On lance le dé. Si on obtient un nombre pair, on tire une boule dans U_1, sinon on tire une boule dans U_2. On gagne si on tire une boule blanche.

Soit G l'événement tiré une boule blanche :

a- Calculer la probabilité de l'événement G.

b- Calculer la probabilité $P_G(A)$.

EXERCICE 11:

Certains gènes peuvent avoir deux états : A (Allèle dominant) ou a (Allèle récessif). Les couples de gènes sur des paires de chromosomes n'ayant pas forcément les mêmes allèles, un individu donné peut avoir l'un des trois génotypes suivants : AA ou aa ou Aa ou Aa ou aa. Lors d'un appariement entre deux individus, l'enfant récupère un allèle de chacun de ses parents.

- Si un parent a le génotype AA et l'autre Aa, l'enfant sera du type Aa ou AA avec des probabilités égale à $\frac{1}{2}$
- Si un parent a le génotype Aa et l'autre Aa l'enfant sera du type AA ou Aa ou aa avec des probabilités égales à $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ respectivement.

On note P_n, Q_n et R_n les probabilités des génotypes AA ou Aa et aa de la génération n.

1. A l'aide d'un arbre ou d'un tableau à deux entrées, faire apparaître tous les cas possibles d'appariements et les génotypes de l'enfant qui en découle.

2. En déduire les probabilités P_{n+1}, R_{n+1} puis Q_{n+1} en fonction de P_n, Q_n et R_n

3. On note $\alpha = P_0 - R_0$.

a- Montrer que pour tout n de IN : $P_n - R_n = \alpha$

En déduire pour tout n de IN, une expression de P_{n+1}, R_{n+1} puis Q_{n+1} en fonction d'un seul paramètre α. En déduire que, pour tout n ≥ 1, les suites (P_n), (Q_n) et (R_n) sont constantes

EXERCICE 12 :

Deux joueurs A et B conviennent du jeu suivant qui se présente comme une succession de parties.

Au départ A et B misent chacun 1 euro et lancent chacun une pièce parfaitement équilibré.

- Si A obtient pile et B face, le joueur A gagne et vis versa.
- Sinon la partie est nulle, les joueurs doublent leur mise et engagent une nouvelle partie.

Le jeu se poursuit ainsi jusqu'à ce qu'un joueur gagne ou que la 20ième partie soit nulle.

Dans ce cas les joueurs reprennent alors leur mise.

Pour tout n allant de 1 à 19, on considère les événements suivants :

A_n : le jeu se termine à la nième partie et le joueur A gagne le jeu.

B_n : le jeu se termine à la nième partie et le joueur B gagne le jeu.

N_n : la nième partie est nulle.

On pose : $x_n = p(A_n)$, $y_n = p(B_n)$ et $z_n = p(N_n)$

1. Calculer les valeurs de x_1, y_1 et z_1
2. Montrer que :
$$x_{n+1} = \frac{1}{4}z_n,\ y_{n+1} = \frac{1}{4}z_n \text{ et } z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n$$
3. En déduire que pour tout n allant de 1 à 20, on a :
$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},\ y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},\ z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$
4. On considère la variable aléatoire X égal à la somme en euro mise en jeu lors de la partie qui conclue le jeu.

a- Montrer que si le jeu se termine à la kième partie : $X = 2^k$, où k est un entier naturel non nul.

b- Donner la valeur maximale de la variable X. Calculer $p(X = 2^{20})$

c- Pour tout k allant de 1 à 19, exprimer l'évènement $(X = 2^k)$ à l'aide de A_k et B_k

En déduire la probabilité $p(X = 2^k)$

d- Calculer l'espérance mathématique E(X) de X

EXERCICE 13 :

n étant un entier naturel non nul, on place dans une urne n boules rouges, $8 + n$ boules noires et 20 boules blanches.

Un joueur tire une boule de l'urne ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

S'il tire une boule rouge, il perd.

S'il tire une boule noire, il gagne.

S'il tire une boule blanche, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage toujours avec équiprobabilité. S'il tire alors une noire, il gagne, sinon il perd.

1. Démontrer que la probabilité que ce joueur a de gagner est $f(n)$ où f est l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans IR telle que : $f(x) = \frac{(x+8)(x+24)}{2(x+14)^2}$
2. Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit maximale. Calculer alors cette probabilité ;
3. Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit minimale. Calculer alors cette probabilité.
4. Dans cette question on suppose que $n = 16$. Pour jouer, le joueur a misé 8 unités monétaires. p et q Etant des entiers naturels tels que $p > q > 8$, s'il gagne à l'issue du premier tirage, on lui remet p unités monétaires et s'il gagne à l'issue du deuxième tirage, on lui remet q unités monétaires. S'il perd il ne reçoit rien. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a- Déterminer la loi de X en fonction de p et q ainsi que son espérance mathématique.

b- On suppose que p et q sont tels que le jeu est équitable c'est – à – dire l'espérance mathématique du gain algébrique est nulle. Montrer alors que $3p + q = 60$.

c- Déterminer les couples (p, q) possibles pour que le jeu soit équitable.

d- Pour $p = 16$ et $q = 12$, calculer l'espérance mathématique et l'écart – type de X.

EXERCICE 14 :

On dispose de deux dés tétraédriques notés A et B .Les quatre faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 4

Lorsqu'on jette un dé, on note le numéro de la face cachée du dé (on suppose que le dé ne peut tomber que sur une face). Pour le dé A, les quatre numéros ont tous la même probabilité d'être cachée. Pour le dé B, la probabilité de noter le numéro i est proportionnelle à i.

1. Calculer les probabilités P_1, P_2, P_3 et P_4 pour les quarte faces du dé B.
2. On lance les deux dés. On note i le numéro caché du dé A et j le numéro caché du dé B. on suppose les lancers indépendants ; on note $P(i\,, j)$ la probabilité de noter i pour le dé A et j pour le dé B.

a- Montrer qu'on a : $P(1,1) = P(2,1) = P(3,1) = P(4,1) = \frac{1}{40}$.

b- Déterminer les probabilités P(i, j) pour tous les nombres entiers i et j compris entre 1et 4.

3. On appelle la variable aléatoire définie par :Z(i, j) est le plus grand des nombres i et j .
Exemple : $Z(1,2) = 2, Z(2,1) = 2, Z(1,1) = 1$.

a- Quelle sont les valeurs prises par Z

b- Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance mathématique $E(Z)$.