TS1 : LES NOMBRES COMPLEXES :

EXERCICE 1 :

1. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. On pose $z_1 = \frac{a+ib}{a-ib}$ et $z_2 = \frac{a-ib}{a+ib}$ deux nombres complexes.
Montrer que $z_1 + z_2$ est un réel et $z_1 - z_2$ est un complexe imaginaire pur.
2. Dans cette question on suppose que a, b et c sont trois complexes de module 1 et tels que : $a + b + c = 1$. Calculer $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
3. Dans cette question, a et b sont des complexes non nuls, A et B leurs points images respectifs dans le repère complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a- Démontrer que O, A et B sont alignés si et seulement si $a\bar{b} \in \mathbb{R}$

b- Montrer que pour que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ soit un réel, il est nécessaire et suffisant que O, A et B soient alignés ou que $OA = OB$.

c- On suppose que les points O, A et B sont non alignés et que $|a| = |b| = 1$. Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

4. ***Application*** : Soient M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que les points O, M_1 et M_2 sont non alignés et que $|z_1| = |z_2| = 1$

a- Calculer en fonction de z_1 et z_2 l'affixe Z du point G barycentre de $\{(M_1, |z_1|); (M_2, |z_2|)\}$

b- Démontrer que $\frac{Z^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}$

c- En déduire que $\overrightarrow{OG}$ est un vecteur directeur de la bissecteur intérieur de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$

EXERCICE 2 :

1. Simplifier les expressions suivantes :
$(1 + cos\theta + isin\theta)^n$; $(1 - cos\theta + isin\theta)^n$
$\frac{e^{ia} + e^{ib}}{1 + e^{i(a+b)}}$; $\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$; $\frac{x - yi}{y + xi}$
2. On pose pour tout $n \in IN^*$:
$C_n(\theta) = 1 + cos\theta + cos2\theta + \cdots + cosn\theta$
$S_n(\theta) = sin\theta + sin2\theta + cos3 + \cdots + sinn\theta$

a- Montrer que si $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors on a :
$$\sum\nolimits_n(\theta) = C_n(\theta) + iS_n(\theta) = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$

b- En déduire que : $\sum_n(\theta) = e^{i\theta} \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{n\theta}{2}}$

c- En déduire les valeurs de $C_n(\theta)$ et $S_n(\theta)$

d- On prend maintenant $\theta = \frac{\pi}{n}$. Déduire du b, que $u_n = C_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0$ et que $v_n = S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

e- Calculer la limite de la suite $\left(\frac{v_n}{n}\right)$

3. Soit $\theta \in]-\pi; \pi]$. Ecrire les complexes suivants sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle : $z_1 = sin\theta + icos\theta$;
$z_2 = 1 + sin\theta + icos\theta$; $z_3 = 1 + sin\theta - icos\theta$;
$z_4 = \frac{(1 - i\sqrt{3})(cos\theta + isin\theta)}{cos\theta + sin\theta + i(cos\theta - isin\theta)}$; $z_5 = \frac{1 + cos\theta + isin\theta}{1 - cos\theta - isin\theta}$

EXERCICE 3 :

1. Montrer que l'ensemble :
$\mathbb{C} = \{(a,b) \mathbin{/} a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ muni de deux opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ définies par :
$(a,b) +_{\mathbb{C}} (a',b') = (a + a', b + b')$ et
$(a,b) \times_{\mathbb{C}} (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$
est un corps
2. Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et i le nombre imaginaire tels que $i^2 = -1$:

a- Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right)^4$ et $\left(\frac{1}{2} - i\sqrt{3}\right)^4$

b- Déterminer les nombres réels a et b tels que : $(a + ib)^4 = \frac{73}{16} - \frac{11}{2}i\sqrt{3}$

3. On considère le complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a- Calculer j^2, et en déduire $1 + j + j^2, j^3, \frac{1}{j}$

b- Démontrer que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ on a :
$2(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)$

4. Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ où $a_k \in \mathbb{R}\ \forall k$

a- Montrer que $\forall z \in$: $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

b- En déduire que si α est une racine de P alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P.

c- On pose : $P(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 2$
Calculer $P(1+i)$ puis en déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$

5. Soit $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$,
(E_0): $z^2 - (1 + 2ie^{i\theta})z - 2 + ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$

a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).
On désignera par z'_θ et z''_θ les solutions de (E_θ) avec $R_e(z'_\theta) < R_e(z''_\theta)$

b- Donner la forme exponentielle de z'_θ

c- Soit $F_1 = \left\{M_\theta(z'_\theta);\ \theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[\right\}$. Déterminer un système d'équations cartésiennes de F_1puis tracer F_1 dans un repère complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$

d- Soit l'ensemble F_2 définie par : $F_2 = \left\{M''_\theta(z_1)\ avec\ z_1 = 2z'_\theta + 1 - i,\ \theta\ varie\ sur\ \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[\right\}$

- Donner une application f telle que : $\forall\, \theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[, f(M_\theta) = M''_\theta$
- Déduire alors F_2 puis le tracer dans le même repère que précédemment.

EXERCICE 4 :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point $M(x; y)$ on associe le nombre complexe z défini par : $z = x + iy$ appelé affixe du point M.

1. Soient M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Démontrer que M_1 et M_2 sont sur la même demi-droite d'origine O si, et seulement si : $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
2. En déduire que $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ sont sur la même demi-droite d'origine O si, et seulement $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$.
3. Soient A ; B et C trois points du plan d'affixes respectives a ; b et c tels que : $|a| + |b| + |c| = 1$. Démontrer que A ; B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O si t seulement si : $a + b + c = 0$.
4. Soient E ; F et G trois points, différents de O, d'affixes respectives α, β et δ tels que : $\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta}{|\beta|} + \frac{\delta}{|\delta|} = 0$ et on pose $S = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|}(z - \alpha) + \frac{\bar{\beta}}{|\beta|}(z - \beta) + \frac{\bar{\delta}}{|\delta|}(z - \delta)$.

a- Démontrer que S est indépendant de z.

b- Calculer $|S|$ puis en déduire que : $|\alpha| + |\beta| + |\delta| \leq |z - \alpha| + |z - \beta| + |z - \delta|$.

c- Démontrer que : $|\alpha| + |\beta| + |\delta| = |z - \alpha| + |z - \beta| + |z - \delta|$. si, et seulement si, pour tout point M d'affixe z on a : $(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{EM}) = (\overrightarrow{OF}; \overrightarrow{FM}) = (\overrightarrow{OG}; \overrightarrow{GM})$.

5. Déterminer puis construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que : $|\alpha| + |\beta| + |\delta| \leq |z - \alpha| + |z - \beta| + |z - \delta|$.

EXERCICE 5 :

A. Soit $\theta \in]-\pi; \pi[$. On suppose que le plan complexe est muni d'un repère complexe orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer $(1 + e^{i\theta})e^{-i\frac{\theta}{2}}$. En déduire alors un argument du complexe $1 + e^{i\theta}$.
2. On pose $z(\theta) = \frac{(1 + e^{i\theta})^2}{2}$

a- Déterminer le module et un argument de $z(\theta)$

b- Représenter dans le plan $z\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3. soit M le point d'affixe $z(\theta)$ et A le point dont l'affixe est 1. On projette orthogonalement A en P sur la droite (OM).

a- Déterminer z_P en fonction de $z(\theta)$

b- Quel est l'ensemble des points M lorsque θ varie dans l'intervalle $]-\pi; \pi[$

c- Calculer la distance PM

d- Donner une construction géométrique de M

B. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Donner l'écriture algébrique de j.
2. En déduire l'écriture algébrique de $z = 2n + 2pj$ où n et p sont deux entiers relatifs.
3. On note par $E = \{z \text{ tels que } z = 2n + pj\}$ où n et p sont des entiers relatifs

a- Monter que $\in E$.

b- Montrer que la somme et le produit de deux éléments de E restent des éléments de E.

c- Montrer que si $p \in \mathbb{Z}^*$ et $z \in E$ alors $pz \in E$.

4. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, on pose $\varphi_n(x) = x^2 - nx + n^2$.

a- Etudier les variations de φ_n.

b- En déduire que $|z - z'| > 1$ pour $(z ; z') \in E^2$.

C. Soit n un entier naturel non nul.

1. Déterminer, si possible, les solutions communes aux équations suivantes : $z^3 = i$ et $z^n = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$
2. Soit θ un réel. On pose $a_n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p cos(p\theta)$ et $b_n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p sin(p\theta)$.

a- En posant $z_n = a_n + ib_n$, Justifier que $z_n = (1 + e^{i\theta})^n$ puis en déduire a_n et b_n.

b- En déduire que : $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots = \sqrt{2^n} sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

EXERCICE 6 :

PARTIE A :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 + 2\lambda^2 z^2(1 + cos\theta)cos\theta + \lambda^4(1 + cos\theta)^2 = 0$ où λ est un nombre réel et $\theta \in [0; \pi]$

Calculer, pour tout $n \in IN$, $\sum_{k=1}^{4} z_k^n$, où $(z_k, 1 \leq k \leq 4)$ sont les racines de l'équation (E).

2. Soit n un entier naturel. On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrer que pour tout nombre complexe z on a : $\sum_{k=1}^{n}(z + u^k)^n = n(z^n + 1)$
3. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) : $z^4 - (2 - i)z^3 - 3iz^2 + (4 - i)z + 1 + 3i = 0$

a- Quel est le terme constant du polynôme P à variable complexe défini par : $P(x) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$

b- Montrer que P admet une solution réelle notée z_1 et une solution imaginaire pure z_2.

c- Vérifier que $z_3 = 2 + i$ est solution de (E).

d- Déterminer alors la solution restante, notée z_4.

e- Montrer que $Z = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \times \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ est un réel.

f- Montrer que les points $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ et $M_4(z_4)$ sont cocycliques.

Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_2M_3})$

PARTIE B :

1. Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$

a- Démontrer que : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation $(E): Z^2 + Z - 1 = 0$

b- Exprimer α en fonction de $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

c- Résoudre (E) puis en déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

2. On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives $1, z_0, z_0^2, z_0^3$ et z_0^4.

a- Soit H le point d'intersection de (A_1A_4) avec la droite (O, e_1). Démontrer que $H\left(cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$

b- Soit (Γ) le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}\right)$ et passant par le point B d'affixe i.
(Γ) coupe la droite (O, e_1) en M et N, M étant le point d'abscisse positive.

c- Démontrer que M et N ont respectivement pour affixes α et β et que le point H est le milieu du segment $[OM]$.

d- En déduire une construction simple du pentagone régulier dont on connait le centre O et un de ses cinq sommets

EXERCICE 7 :

Soit a un nombre réel.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(x + 1)^n - e^{2ina} = 0$

2. On pose $H_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$
Démontrer que $H_n(a) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$

3. En déduire le réel $\prod_{k=1}^{n-1} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

4. Soit α un nombre réel.

a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z complexe $(E_1): z^2 - 2zcos\alpha + 1 = 0$

b- Donner la forme trigonométrique des solutions de l'équation $(E_n): z^{2n} - 2z^n cos\alpha + 1 = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

5. Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n cos\alpha + 1$

a- Montrer que l'on peut écrire :
$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2zcos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$

b- Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que :
$\prod_{k=0}^{n-1} sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$

c- Pour $\alpha \in]0; \pi[$, et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $H_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1} sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$

d- Montrer que $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$

e- Quelle est la limite de H_n quand α tend vers 0.
En déduire que, $\forall\, n \geq 2$, on a :
$sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \ldots \times sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

EXERCICE 8 :

A. Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.

1. Calculer la somme $S(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k}$, $z \in \mathbb{C}$

2. Soit z un nombre complexe.

a- Montrer que : $z^{2n} - 1 = \prod_{k=-n}^{n-1}\left(z - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$

b- Démontrons que :
$S(z) = \prod_{k=1}^{n-1}\left[z^2 - 2zcos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right]$

c- En considérant $S(1)$ et $S(i)$, calculer $\prod_{k=1}^{n-1} sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ puis $\prod_{k=1}^{n-1} cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

B. Soit la famille d'équation :
$E(\theta): z^2 - (1 + isin\theta)z + \frac{i}{2}sin2\theta = 0$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Soit P un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et le point $M(z)$ un point du plan P.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E(\theta)$.
On précisera les cas des racines doubles.

2. Soit z_1 et z_2 les solution de cette équation, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ et I le milieu de $[M_1M_2]$

a- Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

b- Démontrer que l'ensemble des points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ est un cercle que l'on précisera.

c- Démontrer que lorsque $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ sont distincts, la droite contenant ces deux points à une direction fixe indépendante de θ.

d- θ étant donné (on fera une figure pour $\theta = \frac{\pi}{6}$), déduire de ce qui précède une construction de I et des points M_1 et M_2.

EXERCICE 9 :

A. Le plan est muni d'un repère orthonormé complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit m un nombre complexe non nul tel que $|m| = r > 0$ et $\arg(m) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
On désigne par M et A les points d'affixes respectives m et 1.

1. Donner la forme exponentielle de $\frac{\sqrt{3} + i}{2}$

2. Déterminer r pour que $AM = 1$

3. Soit $(E_m): mz^2 - (1 + i)z + \frac{\sqrt{3} + i}{2} = 0$.
On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 les solutions de (E_m).

a- Sans résoudre (E_m), montrer que : $arg(z_1 + z_2) = \frac{\pi}{12}[2\pi]$

b- Montrer que : $m\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}}\right) = i$

c- Résoudre alors dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E_m)

d- Ecrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.

4. Montrer que OM_1M_2 est un triangle rectangle isocèle en O.

5. Dans la suite de l'exercice, M est un point du cercle trigonométrique.

a- Soit $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi\}$. Montrer que $\frac{i - z}{i + z} = e^{i\theta}$ équivaut à $z = tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

b- Résoudre alors dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$(E'_m) = m\left(\frac{i - z}{i + z}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2\overline{m}}\right)\left(\frac{i + z}{i - z}\right)^2 = 1 + i$

B. Soient α et β deux nombres complexes quelconques. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et pour tout complexe z : $f(x) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$

1. Montrer que $f(1) + f(j) + f(j^2) = 3$
2. En déduire que $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$
3. En utilisant 2), montrer que l'un au moins des nombres réels $|f(1)|, |f(j)|, |f(j^2)|$ est supérieur ou égal à 1.
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité O et tel que l'affixe de A soit un réel r strictement positif fixé. I et J sont deux points quelconques du plan d'affixes respectives a et b.
Dans cette question on prend $\alpha = -\frac{a+b}{r}$ et $\beta = \frac{ab}{r^2}$

a- Montrer que les affixes respectives de B et C sont les complexes rj et rj^2

b- Montrer que $BO.BI.BJ = r^3|f(j)|$. Calculer de la même manière $CO.CI.CJ$ et $AO.AI.AJ$

c- Montrer que le triangle ABC a au moins un sommet S vérifiant : $SO.SI.SJ \geq r^3$

EXERCICE 10 :

Soit P le plan affine rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on note $P^* = P/\{O\}$.

Soit $f: \begin{cases} \mathbb{C}^* & \to \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto f(z) = z' = \frac{1}{z^2} \end{cases}$

et on note $F: \begin{cases} P^* & \to P^* \\ M(z) & \mapsto M'(z') \end{cases}$

PARTIE A :

1. Soit $z \neq 0, r = |z|,\ \theta = \arg(z)$.
Démontrer que $z' = \frac{1}{r^2}(cos2\theta - isin2\theta)$
2. L'application f est – elle surjective ? injective ?
3. Etudier l'équation $f(z) = z$. Représenter l'ensemble des points invariants par f
4. Pour $|z| = 1$, construire l'image par F d'un point $M(z)$.
5. Pour $|z'| = 1$, représenter les points $M(z)$ d'image $M'(z')$ par F.
6. Soit (D) une demi – droite d'origine O ; $(D^*) = (D) - \{O\}$

a- Construire l'image par F de la demi – droite (D^*)

b- Construire l'image par F d'une demi – droite (D) passant par O, privée O.

7. Soit (Δ) une droite passant par O et $(\Delta^*) = (\Delta) - \{O\}$
Déterminer l'ensemble des points M tels que $F(M) \in (\Delta^*)$

PARTIE B :

Soit $(\mathbb{\Gamma})$ l'ensemble des points $M(z)$ du plan P^* tels que :

$z = -2cos^2\theta - 2isin\theta cos\theta$; $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

1. Démontrer que $(\mathbb{\Gamma})$ est inclus dans un cercle passant par O.
2. Préciser, en fonction de θ, le module et un argument de z, affixe d'un point M de $(\mathbb{\Gamma})$
3. Exprimer, en fonction de $tan\theta$, les coordonnées (x', y') de $M' = F(M)$
4. En déduire l'équation et la nature de l'ensemble $(\mathbb{\Gamma}') = F(\mathbb{\Gamma})$
5. Vérifier que les points I et J de $(\mathbb{\Gamma})$, d'arguments respectifs $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ sont sur $(\mathbb{\Gamma}')$. Expliquer le résultat précédent puis construire $\mathbb{\Gamma}$.

EXERCICE 11 :

A. ***Racine septième de l'unité***

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^7 - 1 = 0$
On donnera les solutions sous forme exponentielle
2. On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{7}}$

a- Démontrer que les solutions de l'équation précédente sont les nombre w^k avec $0 \leq k \leq 6$

b- En déduire que le produit des racines septième de l'unité est égal à 1.

3. On désigne par S la somme de ces racines.

a- Démontrer que $wS = S$

b- En déduire que la somme S est nulle.

4. Démontrer que les solutions de cette équation sont deux à deux conjuguées.
5. En déduire que pour tout complexe z, on a :
$z^7 - 1 = \left(z^2 - 2zcos\frac{2\pi}{7} + 1\right)\left(z^2 - 2zcos\frac{4\pi}{7} + 1\right)\left(z^2 - 2zcos\frac{6\pi}{7} + 1\right)$

B. ***Relations trigonométriques***

1. Démontrer que : $z^7 - 1 = (z - 1)(z^6 + z^5 + \cdots + 1)$
2. En déduire les solution de l'équation :
$z^6 + z^5 + z^4 + \cdots + 1 = 0$
3. Démontrer que $cos\frac{2\pi}{7}, cos\frac{4\pi}{7}, cos\frac{6\pi}{7}$ sont les racines de l'équation : $8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0$
4. Démontrer que $cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$
et $cos\frac{2\pi}{7}cos\frac{4\pi}{7}cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$

C. ***Polygone à 7 côtés ou Heptagone.***

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1. On pose $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Placer les images des solutions de l'équation $z^7 - 1 = 0$.
On note A, B, C, D, E, F, G les sommets du polygone régulier convexe direct P ainsi obtenu.
2. Démontrer que O est l'isobarycentre des sommets du polygone P.
3. Démontrer que l'aire du polygone P est égale à $\frac{7}{2}sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$
4. On pose $AB = a, AC = b$ et $AD = c$.

a- Démontrer que $a^2 + b^2 + c^2 = 7$

b- Démontrer que :
$a = 2sin\left(\frac{\pi}{7}\right), b = 2sin\left(\frac{2\pi}{7}\right), c = 2sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$