TS1 : ARITHMETIQUE

EXERCICE 1 :

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $5n^3 + n$ est divisible par 6.
2. Montrer que si n est un multiple de 7, alors $n^6 - 1$ est un multiple de 7.
3. Montrer que pour tout entier naturel$n$, $n(n^2+5)$ est divisible par 6.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
5. Montrer que $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$
6. Discuter suivante les valeurs de l'entier naturel , le reste de la division euclidienne de 5^p modulo p.
7. Déduire du 6) que pour tout entier naturel$n \in IN^*$, le nombre $13^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13
8. Quelle est le reste de la division32^{45} par 7?
9. Quelle est le reste de la division 24^{40} par 5 ?
10. Quel est le chiffre des unités de l'écriture décimale du nombre 7^{77} ?
11. Déterminer le chiffres des dizaines de l'écriture décimale de 444^{44^4} ?
12. Quelle est le reste de a division euclidienne du nombre $3^{10} + 1$ par 10 ?
13. Quelle est le reste de la division euclidienne du nombre $7^{10} + 1$ par 10 ?
14. Soit r ∈ IN, 0 ≤ r ≤ 9. Montrer que 10 divise $r^{10} + 1$ si et seulement si r ∈ {3 ; 7}
15. Déterminer l'ensemble des entiers naturels x tels que $10/(x^{10} + 1)$.

EXERCICE 2 :

PARTIE A :

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9
2. Résoudre dans :

a- $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}x + \dot{1} = \dot{0}$

b- $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + \dot{2}x + \dot{6} = \dot{0}$

c- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ les système suivants :

$$\begin{cases} \dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2} \\ x + \dot{5}y = \dot{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dot{3}x + \dot{6}y = \dot{5} \\ \dot{5}x + \dot{2}y = \dot{3} \end{cases}$$

PARTIE B :

Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 3;\ y_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que les points $M_n\binom{x_n}{y_n}$ sont sur la droite (D): $2x - y - 5 = 0$
2. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n
3. Démontrer que (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers relatif
4. Soit n un entier naturel

a- Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.

b- Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5 alors ils sont premiers entre eux

5. Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n = 2^{n+1} + 1$
6. Soit n un entier naturel. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}
7. En déduire les valeurs de n pour les quelles x_n et y_n sont divisibles par 5.

EXERCICE 3 :

A. On rappelle ***le petit théorème de Fermat :*** « si p est un entier premier, a un entier naturel premier avec p alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ »

1. Déterminer un entier naturel n tel que: $2^n \equiv 1[13]$.
2. Soit a un entier naturel non divisible par 13. Démontrer que $a^{12} \equiv 1[13]$
3. Soit a un entier naturel non nul. On appelle ordre de a $(modulo\ 13)$ le plus petit entier naturel k non nul tel que : $a^k \equiv 1[13]$

a- Soit k_0 l'ordre de a. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 12 par k_0 vérifie $a^r \equiv 1[13]$

b- En déduire que k_0 divise 12.

c- Quelles sont les valeurs possibles de k_0 ?

4. Déterminer l'ordre modulo 13 de tous les entiers compris entre 2 et 12.
5. A tout entier naturel n non nul, on associe le nombre $A_n = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + 12^n$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A_{2020} par 13.

B. Soit la suite (U_n) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} U_0 = 27 \\ U_{n+1} = 3U_n - 4 \end{cases}$ pour n de $\mathbb{N}$

1. Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4. Quelle conjecture peut – on faire concernant les deux derniers chiffres de U_n ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+2} \equiv U_n[8]$. En déduire que pour tout entier naturel n, $U_{2n} \equiv 3[8]$ et que $U_{2n+1} \equiv 5[8]$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - 2$

a- Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b- En déduire que pour tout entier naturel n, $2U_n = 50 \times 3^n + 4$

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $2U_n \equiv 54[100]$.
5. Déterminer les derniers chiffres de l'écriture décimale de U_n suivant les valeurs de n.
6. Montrer que deux termes consécutifs de la suite (U_n) sont premiers entre eux.

EXERCICE 4 :

A. Soit l'équation : $2x - 5y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Expliquer pourquoi cette équation n'admet pas de solutions.

2. On considère l'équation $(E): 20x - 9y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
a- Montrer que si $(x_0;\ y_0)$ est solution de (E), alors y_0 est un multiple de 2.
b- Résoudre l'équation (E)
3. Déterminer l'ensemble des solutions $(x; y)$ de (E) telles que $pgcd(x; y) = 2$
4. Soit p un entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ en base 6 et $\overline{bbaa}^{(4)}$ en base 4.
a- Montrer que $a + 5$ est un multiple de 4 et en déduire la valeur de a.
b- Déterminer les valeurs de b et c.
c- Déterminer l'écriture de p en base 10.

B. On définit les nombres F_n définies par : $F_n = 2^{2^n} + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$
1. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3, F_4
2. Vérifier que $641 = 5 \times 2^7 + 1 = 5^4 + 2^4$
3. Montrer que $5 \times 2^7 \equiv -1[641]$, $5^4.2^{28} \equiv 1[641]$ et $5^4 \equiv -2^4[641]$
4. En déduire que $F_5 = 2^{32} + 1$ est divisible par 641
5. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2,\ 2^{2^n} \equiv 6[10]$
6. En déduire le chiffre des unités de $F_n,\ n \geq 2$
7. Montrer que $\frac{F_{n+1} - 2}{F_n} = F_n - 2$
8. Soit $d = F_{n+1} \wedge F_n$. Montrer que d divise 2
9. Montrer alors que $d = 1$
10. Déterminer un couple (α, β) tels que $\alpha F_3 + \beta F_2 = 1$
11. Déduire la résolution dans : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de $257x + 17y = 1$

EXERCICE 5 :

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent – il être premiers »

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose : $N_p = 1 \ldots 1$ où 1 apparait p fois. On rappelle dès lors que : $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$ et $N_4 = 1111$ sont – ils premiers ?
2. Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut – on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?
3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p, n'est pas premier.
a- On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$
b- On suppose que p est un multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$
c- On suppose que p n(est pas premier et on pose $p = kp$, où k et q sont des entiers naturels plus grand que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k

4. Enoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est – elle suffisante pour que N_p soit premier ?

EXERCICE 6 :

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :
$(x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) = x^k - 1$
Dans la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.
2. Soit n un entier naturel et d un diviseur positif de n : $n = kd$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$
3. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.
4. Soit m et n deux entiers naturels non nul et d leur $pgcd$.
a- On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers naturels relatifs u et v tels que : $mu + nv = d$
b- On suppose que u et v strictement positifs. Montrer que : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$. Montrer que $a^d - 1$ est le $pgcd$ de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$
c- Calculer, en utilisant le résultat précédent, le $pgcd$ de $2^{63} - 1$ et $2^{60} - 1$

EXERCICE 7 :

On rappelle la propriété connue sous le nom de *petit théorème de Fermat :*

« soit p un nombre premier et un entier naturel premier avec p, alors a^{p-1} est divisible par p »

1. Soit p un nombre premier impair.
a- Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1[p]$
b- Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1[p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que si k divise n, alors $2^n \equiv 1[p]$
c- Soit b tel que $2^b \equiv 1[p]$, b étant le plus petit entier naturel non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que $2^n \equiv 1[p]$, alors b divise n.
2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$. On prend pour p un facteur premier de A.
a- Justifier que $2^q \equiv 1[p]$
b- Montrer que p est impair
c- Soit b tels que $2^b \equiv 1[p]$, b étant le plus petit entier naturel vérifiant cette propriété. Montrer en utilisant 1) que b divise q. En déduire que $b = q$.
d- Montrer que q divise $p - 1$, montrer que $p \equiv 1[q]$
3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m + 1$, avec m entier non nul : $103, 137, 239, 307$. En déduire que A_1

EXERCICE 8 :

1. On considère l'équation $(E): 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a- Déterminer le $pgcd$ de 109 et 226. Que peut – on en conclure pour l'équation (E) ?

b- Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k, 68 + 109k)$ où k appartient à $\mathbb{Z}$.
En déduire qu'il existe un unique naturel non nul d inférieur ou égal 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$.

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$. On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante : à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.
A tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a- Vérifier que $g[f(0)] = 0$
On rappelle le résultat suivant appelé *petit théorème de Fermat :*
Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$

b- Montrer que $\forall\ a\ \in \mathbb{N}^*$ de A, $a^{226} \equiv 1[227]$

c- En utilisant 1) b), en déduire que, quel que soit l'entier naturel a non nul de A, $g[f(a)] = a$.
Que peut – on dire de $f[g(a)] = a$?

EXERCICE 9 :

A. Soit q un entier naturel.

1. Montrer que q est impair si et seulement si q^2 est impair.
2. Montrer que si q est impair alors $q^2 \equiv 1[8]$

B. On se propose de déterminer l'ensemble A des triplets d'entiers naturels (m, n, q) tels que $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$

1. Vérifier que $(2, 1, 5)$ est un élément de A.
Dans la suite on suppose que (m, n, q) est un élément de A.
2. Montrer que q est impair.
Montrer que $q^2 - 3^{2n} \equiv 0[8]$
3. Montrer alors que m est différent de 1.
4. On suppose que $m > 2$

a. Montrer que les entiers $(q - 3^n)(q + 3^n)$ sont pairs

b. Soit $d = (q - 3^n)\wedge(q + 3^n)$. Montrer que d divise $2q$ et d divise 2^{2m}. En déduire que $d = 2$.

c. Montrer que $q - 2^n = 2$ et que $q + 3^n = 2^{2m-1}$
En déduire que $q = 2^{2m-2} + 1$ et $3^n = 2^{2m-2} - 1$

5. Déterminer n et q lorsque $m = 2$
6. On suppose que $m \geq 3$

a. Montrer que : $3^n \equiv -1[16]$

b. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel k, les réels possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16

c. En déduire qu'il n'existe pas de triplet (m, n, q) élément de l'ensemble A tels que $m \geq 3$

d. Déterminer l'ensemble A.

EXERCICE 10 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{3+4i}{5}\bar{z} + \frac{1-2i}{5}$

1. On note x, x', y et y' les parties réelles et imaginaires de z et z'.
Démontrer que : $\begin{cases} x' = \frac{3x + 4y + 1}{5} \\ y' = \frac{4x - 3y - 2}{5} \end{cases}$
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3. Quelle est la nature de l'application f.
4. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
5. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a- Donner une solution particulière $(x_0;\ y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$

b- Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$

6. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'. Déterminer les entiers y tels que $R_e(z')$ et $Im(z')$ soient entiers (on pourra les congruences modulo 5)

EXERCICE 11 :

A. Question de cours

1. Enoncer le *théorème de Bézout* et le *théorème de Gauss*
2. Démontrer le *théorème de Gauss* à partir du théorème en utilisant le *théorème de Bézout*.

B. Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$(S): \begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases}$

1. Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que : $19u + 12v = 1$
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est solution de (S).
2. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$
3. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$
4. Trouver un couple (u, v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
5. Déterminer l'ensemble des solutions de (S)
6. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
7. On divise n par $228 = 12 \times 19$.
Quel est le reste r de cette division ?

EXERCICE 12 :

L'espace est rapporté orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation
$x^2+y^2-z^2=1$

1. Montrer que la surface est symétrique par rapport au plan (xOy).
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives $(3\,;\,1\,;\,-3)$ et $(-1\,;\,1\,;\,1)$.

a- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b- Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).
4. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et d'un plan d'équation : $z=68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
5. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée. On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a<b$ et que $ppcm(a\,;\,b)=440$ autrement dit, $(a\,;\,b)$ est une solution du système (1): $\begin{cases} a<b \\ a^2+b^2=4625 \\ ppcm(a;b)=440 \end{cases}$
6. Montrer que si $(a\,;\,b)$ est solution de (1) alors $pgcd\ (a\,;\,b)$ est égale à 1 où 5.

EXERCICE 13 :

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est – à – dire tel que $n^3\equiv 2009[10000]$

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
2. En déduire que $2009^{8001}\equiv 2009[16]$
3. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=2009^2-1 \\ u_{n+1}=(u_n+1)^5-1 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

a- Démontrer que u_0 est divisible par 5.

b- Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=u_n[u_n^4+5(u_n^3+2u_n^2+2u_n+1)]$

c- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}

d- Vérifier que $u_3=200^{209}-1$ puis en déduire que $2009^{250}-1\equiv 1[625]$

e- Démontrer alors que $2009^{8001}\equiv 2009[625]$

4. En utilisant le *théorème de Gauss* et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001}-2009$ est divisible par 10000.
5. Déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

EXERCICE 14 :

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1;46]$

1. On considère l'équation (E): $23x+47y=1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a- Donner une équation $(x_0;\ y_0)$ de (E).

b- Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ solutions de (E).

c- En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que : $23x\equiv 1[47]$

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a- Montrer que si $ab\equiv 0[47]$ alors $a\equiv 0[47]$ ou $b\equiv 0[47]$

b- En déduire que si $a^2\equiv 0[47]$ alors $a\equiv 1[47]$ ou $a\equiv -1[47]$

3. Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier q tel que $p\times q\equiv 1[47]$

Pour la suite, on admet que pour tout entier naturel p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que : $p\times inv(p)\equiv 1[47]$

a- Quels sont les entiers de A qui vérifient $p=inv(p)$?

b- Montrer que $46!\equiv -1(47)$

EXERCICE 15 :

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls $(a\,;\,b)$, on note $pgcd(a\,;\,b)$ le plus grand commun diviseur de a et b.

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. Soit Δ_1 la droite d'équation : $y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}$

a- Montrer que si (x,y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x-\ 12y$ est divisible par 3.

b- Existe – il un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? justifier.

On considère désormais la droite Δ d'équation : $y=\frac{m}{n}x-\frac{p}{q}$ où m,n,p et q sont des entiers relatifs tels que $pgcd(m,n)=pgcd(p\,;\,q)=1$

Ainsi, les coefficients de l'équations de l'équation (E) sont des facteurs irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m,n,p et q pour que la droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. On suppose ici que Δ comporte un point de coordonnées $(x_0;\ y_0)$ où x_0 et y_0 sont des entiers

a- En remarquant que le nombre ny_0-mx_0 est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.

b- En déduire que q divise n.

3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple $(x_0;\ y_0)$ d'entiers relatifs tels que $y_0=\frac{m}{n}x_0-\frac{p}{q}$

a- On pose $n=qr$, où r est un entier non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru-mv=1$

b- En déduire qu'il existe un couple $(x_0;\ y_0)$ d'entiers relatifs tels que : $y_0=\frac{m}{n}x_0-\frac{p}{q}$

4. Soit Δ la droite d'équation $y=\frac{3}{8}x-\frac{7}{4}$.

Cette droite possède – t – elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier