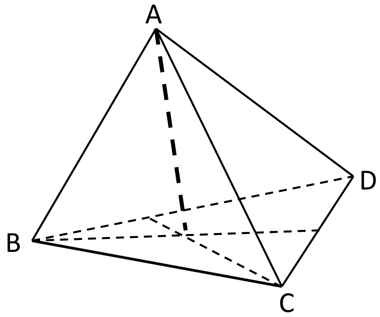
TS1: LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE

EXERCICE 1 :

PARTIE A :



1. Montrer que l'aire du triangle BCD est : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\|$
2. Montrer que le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est donné par : $\left|\frac{1}{6}(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BA}\right|$
3. En déduire que la hauteur AH issue de A est : $AH = \frac{|(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BA}|}{\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\|}$
4. Calculer la hauteur AH du tétraèdre $ABCD$ avec : $A(-1\,;\,4\,;\,5), B(0\,;\,1\,;\,1), C(1\,;\,4\,;\,0)\ et\ D(-3\,;\,5\,;\,0)$.
5. Déterminer une équation cartésienne du plan ABC puis retrouver la hauteur AH.

PARTIE B :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On donne les points $A\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et $F(0\,;\,1\,;\,0)$.

Soit le point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace E.

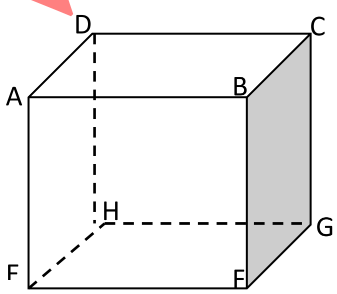
1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}$
2. Calculer les coordonnées du point M_0 tel que : $\overrightarrow{M_0A}\wedge\overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_0F}$
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan $(O,\vec{\jmath},\vec{k})$ tel que : $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MF}\|$
4. En interprétant $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|$ comme une aire, montrer que ces points M sont à égale distance du point F et de la droite (AB).
5. Répondre aux mêmes questions si on remplace le plan $(O,\vec{\jmath},\vec{k})$ par le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

EXERCICE 2 :

PARTIE A :

Soit un réel a strictement positif, distinct de 1.

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur a.



1. La base (B) $(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EA})$ est è elle directe ? est – elle orthonormale directe ?
2. Construire à partir de (B) une base orthonormale directe de l'espace.
3. Soit la base (B') : $\left(\frac{1}{a}\overrightarrow{DC},\frac{1}{a}\,\overrightarrow{DA},\frac{1}{a}\overrightarrow{DH}\right)$

a- Est – elle une base orthonormale directe ?

b- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{GB}$ dans la base (B').

c- Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}\wedge\overrightarrow{GB}$.

PARTIE B :

Soit A et B deux points de l'espace $\mathscr{E}$, I le milieu de $[AB]$. On pose $a = AI$, a un réel positif.

1. Soit M un point de l'espace $\mathscr{E}$ distinct de I et α l'angle géométrique $\widehat{AIM}$.

Montrer que $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\| = 2a\sin\alpha$:

a- En utilisant la relation de $Chasles$

b- En décomposant le triangle AIM en deux triangles et en utilisant les aires.

c- Déterminer l'ensemble (F) des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que : $\frac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|}{\|\overrightarrow{IM}\|} = 2a$.

2. Démontrer que l'ensemble des point M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que : $\frac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|}{\|\overrightarrow{IM}\|} = a$ est un cône de révolution de sommet I (privé du point I).

EXERCICE 3 :

Soit O un point de l'espace $\mathscr{E}$.

Le but du problème est de construire deux points A et B connaissant : la somme $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, le produit scalaire $k = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ et le produit vectoriel $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$

On suppose que les points S et P sont distincts de O et de plus on a : $(OS) \perp (OP)$.

On suppose l'existence de ces deux points : A et B

1. En utilisant la définition de $\overrightarrow{OP}$, montrer que les points A et B sont situés dans le plan passant par O et orthogonal à $\overrightarrow{OP}$.
2. Soit I le milieu de [OS].

a- Montrer les égalités suivantes :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OI^2 - IA^2 = OI^2 - IB^2$

$puis\ IA^2 = IB^2 = OI^2 - k$

b- Le problème posé est è il toujours solution ?

c- On suppose que $OI^2\ -\ k$ est strictement positif. Montrer alors que les points A et B sont situés sur un cercle de centre I.

3. Montrer l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OS}$.

En déduire l'égalité : $d\big(A,(OS)\big) = \frac{\|\overrightarrow{OP}\|}{\|\overrightarrow{OS}\|}$

4. Montrer alors que chacun des points A et B est situé sur une droite parallèle à (OS) ces deux droites étant symétriques par rapport à I.

A quelles conditions ces deux droites coupent elles le cercle précisé en 2-c) ?

On suppose remplies toutes les conditions d'existence de A et B, expliquer comment construire les points A et B, pourquoi sont è ils symétrique par rapport à I. En déduire le nombre de solution du problème

EXERCICE 4 :

A. Soit le cube $OABCDEFG$ représenté par la figure ci – dessous. L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$.

On désigne par a un réel strictement positif.

L, M et K sont les points définis par :

$\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.
2. En déduire l'aire du triangle DLM.
3. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).
4. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

a- Démontrer que : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$

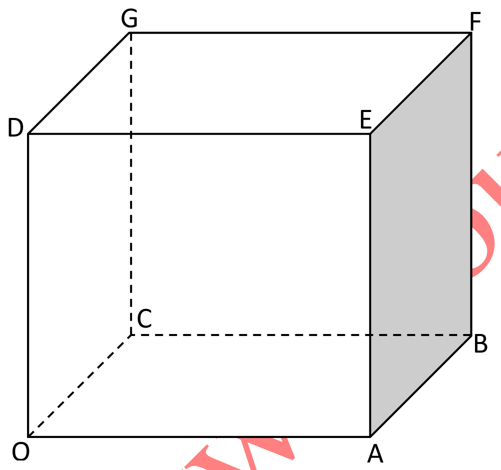
b- Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda\,\overrightarrow{OK}$.

Démontrer que $\lambda = \frac{a}{a^2+2}$. En déduire que H appartient au segment $[OK]$

c- Déterminer les coordonnées de H.

d- Exprimer $\overrightarrow{HF}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$.

En déduire que : $HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$



B. L'espace est rapporté à repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points $A(1,0,0), B(1,2,-1), C(-1,2,0)$ et $I(0,1,-3)$

1. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$
2. En déduire que les points A, B et C déterminent un plan dont une équation est : $x + y + 2y - 1 = 0$
3. Soit S la sphère de centre le point I et passant par le point A

a- Montrer que S passe par le point C

b- Montrer que l'intersection du plan P et la sphère S est un cercle de centre le pont B et le rayon $\sqrt{5}$

4. α étant un réel, on considère l'ensemble S_α des points $M(x, y, z)$ tels que :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2\alpha z - 1 = 0$

a- Montrer que S_α est la sphère de centre $I_\alpha(0, 1, \alpha)$ et de rayon $R_\alpha = \sqrt{1+\alpha^2}$

b- Montrer que la sphère S_α passe par les points A et C

c- En déduire que pour tout réel α, le plan P coupe la sphère S_α selon un cercle (C_α)

5. Soit r_α le rayon du cercle (C_α).

a- Montrer que $r_\alpha = \sqrt{5}$ si et seulement si $\alpha = 3$ ou $\alpha = -3$

b- Justifier que les centres des cercles (C_{-3}) et (C_3) sont respectivement le point B et un point B' dont on déterminera les coordonnées.

c- Vérifier que $ABCB'$ est un losange.

EXERCICE 5 :

A. ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On rapporte à l'espace au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG}$
2. En déduire une équation cartésienne du plan (BGD)
3. Vérifier que la droite (EC) est orthogonale au plan (BGD)
4. Donner une équation cartésienne de la sphère (S) de centre C et tangente au plan (BGD)
5. A tout α appartenant à $[0;1]$on associe le point M de coordonnées $(\alpha, \alpha, 1-\alpha)$

a- Montrer que M appartient au segment $[EC]$.

b- Montrer que la distance du point M à la droite (BD) est égale à $\sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + \frac{3}{2}}$

c- Déterminer α pour que la distance du point M à la droite (BD) soit minimale.

Soit L le point associé à cette valeur de α.

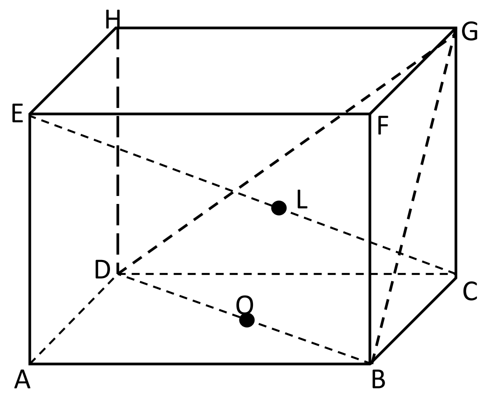
d- Vérifier que L soit le centre de gravité du triangle BGD.

6. Soit h l'homothétie de centre E et de rapport le réel $k \in [0,1]$

a- Donner l'expression analytique de h

b- vérifier que $h(C) = M$

c- Déterminer une équation de la sphère (S') image de la sphère (S) par h.



B. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points $A(1,0,2)$, $B(-2,1,-1)$ et $C(0,0,1)$

1. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

2. En déduire qu'une équation du plan (ABC) est $P: x - y + 1 = 0$
3. On considère les points $I(1,-1,-1)$ et $J\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$. Soit (Δ) la droite passant par I et perpendiculaire à P

a- Montrer que la droite (Δ) coupe le P en J

b- Calculer la distance IJ

4. Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 2 + 2y + 2z - 2 = 0$

a- Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon R que l'on déterminera

b- Montrer que S coupe P coupe la sphère suivant le cercle de centre J et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. Pour tout $\theta \in [0; 2\pi[$, on considère le point $N(1+cos\theta, -1+sin\theta, -3)$

a- Vérifier que N est un point de la sphère S quelque soit $\theta \in [0; 2\pi[$

b- Justifier que le point N n'appartient pas au plan P.

c- Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AN} = -5 - cos\theta$

d- En déduire la valeur de θ pour laquelle le volume du tétraèdre $ABCN$ est minimal

EXERCICE 6 :

A. Soit $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace. On considère les points $A(-2,3,2)$ et $B(2,3,2)$ et S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 9 = 0$

1. Montrer que S est une sphère et préciser son rayon et les coordonnées de son centre I.
2. Montrer que $[AB]$ est un diamètre de S
3. Soit p le plan d'équation $z = 2$ et soit $J(-6,3,2)$

a- Vérifier que I appartient au plan P et en déduire que la sphère S coupe P suivant le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$

b- Dans le plan P, on considère le cercle (Γ') de centre J et de rayon $r = 4$.

c- Montrer que les cercles (Γ) et (Γ') sont tangents extérieurement en A.

4. Soit E le point de coordonnées $(4,3,0)$. On considère l'homothétie h de centre E, de rapport $\frac{5}{2}$ et on désigne par S' la sphère image de S par h.

a- Déterminer le rayon de S' et les coordonnées de son centre I'.

b- Justifier que le plan P coupe la sphère S' suivant le cercle (Γ')

c- La droite (EA) recoupe S' en A'. Soit B' le point diamétralement opposé à A' sur la sphère S'. Montrer que les point E, B et B' sont alignés.

B. L'espace orienté E est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Soit f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point M de coordonnées (x,y,z) associe le point M' d coordonnées (x',y',z') tels que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = z+1 \\ z' = x-1 \end{cases}$

1. Montrer que f est une isométrie
2. Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) passant par le point A de coordonnées $(0,0,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$
3. Soit P le plan perpendiculaire à (Δ) en A.

a- Montrer que $I\ (-1,0,0)$ appartient à P.

b- Prouver que $I' = f(I)$ appartient à P.

c- Déterminer la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques.

4. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ d'images M' tels que le milieu J de $[MM']$ appartient :

a- Au plan Q d'équation cartésienne : $2x + y - z = 0$

b- A la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est $x = y = z$.

EXERCICE 7 :

A. Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère direct de l'espace, f est l'application de l'espace dans lui-même définie par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' = z \end{cases}$

1. Démontrer que f est une rotation ; préciser son axe et une mesure de son angle.
2. On considère les quatre points $A(2\,;0\,;0)$; $B(-1;-\sqrt{3};O)$ et $D(0;0;4)$. On pose $E = \{A;B;C;D\}$

a- Démontrer que ABC est un triangle équilatéral de centre gravité O.

b- Vérifier que l'application f laisse globalement invariant le point E.

B. $ABCDEFGH$ est le cube représenté ci - contre. O est son centre, I est le milieu de $[AB]$, J le centre de gravité de la face $DGCH$.

1. Montrer que (ABC), est le plan médiateur des Segments $[ED]$ et $[FC]$
2. On note S_1, S_2, S_3 les réflexions dont les plans Respectifs sont (ABG), (BCG) et (IOJ) Vérifier que ces réflexions laissent invariant le cube $ABCDEFG$
3. On considère l'application f telle que $f = S_1 o S_2$

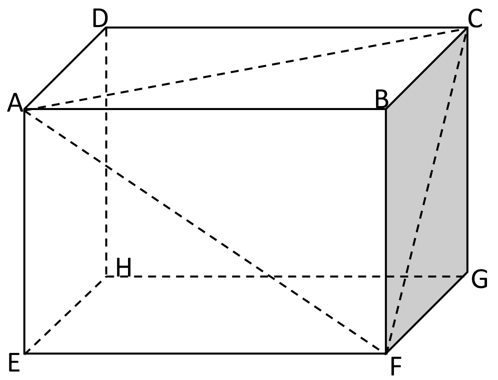
a- Justifier que f est une rotation d'axe (BH)

b- En orientant le plant (ACF) par $\overrightarrow{BH}$, déterminer La restriction de f à ce plan. En déduire l'angle de f

4. Soit r le demi – tour d'axe (OI) et $g = rof$

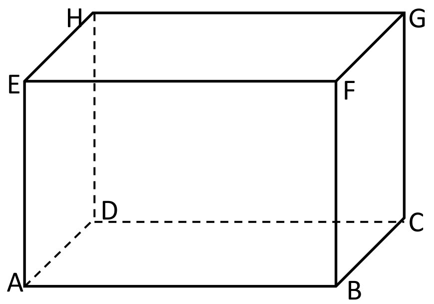
a- En écrivant r comme la composée de deux réflexions . Judicieusement choisies, déterminer la nature de g.

b- Déterminer les éléments caractéristiques de g



EXERCICE 8 :

A. $ABCDEFGH$ est un cube d'arrête 1.
On muni l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$



Soit M un point de $[HG]$. On note $m = HM$
(m est donc un réel appartenant à $[0, 1]$)

1. Montrer que, pour un réel m appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est : $(-1+m)x + y - mz = 0$
3. On note d_m la distance du point E au plan (MFD)

a- Montrer, que pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, $d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

b- Déterminer la position du point M sur $[HG]$ pour laquelle la distance d_m est maximale.

B. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit les points : $A(-2, 1, 1), B(2, 0, -2), C(2, 1, -1)$.

1. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire qu'une équation cartésienne du plan $P = (ABC)$ est : $x - 2y + 2z + 2 = 0$.
3. Soit S définie par :

$S = \{M(x, y, z);\ \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$

a- Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

b- Montrer que $S \cap P$ est un cercle que l'on caractérisera.

4. Soit h l'application de l'espace dans lui – même, qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point :

$$M(x', y', z')\ tels\ que: \begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y - 6 \\ z' = -2z - 6 \end{cases}$$

a- Montrer que h est une homothétie de centre I dont on déterminera le rapport.

b- Donner une équation cartésienne du plan (P') image de P par h.

c- Quelle est la position relative de P' et S.

d- Calculer le volume du tétraèdre $ABCI$ et en déduire le volume de son image par h.

EXERCICE 9 :

A. L'espace E est rapporté un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On donne $A(2, -1, -4), B(0, 1, -2)$ et le plan $P_m: x + (1-2m)y - mz - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel.

1. Vérifier que pour tout réel m, $B \in P_m$
2. Déterminer m pour que la droite $(AB) \perp P_m$
3. Calculer $d_m = d(A, P_m)$ en fonction de m. En déduire la valeur de m pour laquelle $(AB) \subset P_m$
4. Soit H_m le projeté orthogonal de A sur P_m. Déterminer m pour que AH_mB soit un triangle rectangle isocèle.
5. Soit $t \in\ ]-\infty; 1[$ et l'ensemble :

$S_t = \{M \in E\ tel\ que\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \ln(1-t)\}$

a- Ecrire l'équation cartésienne de S_t

b- Déterminer suivant , la nature de S_t

6. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2

a- Déterminer l'expression analytique de h

b- Déterminer $h(P_m)$ image de P_m par h.

B. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(4, 0, 0), B(0, 4, 0)$ et $C(0, 0, 4)$

1. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
2. En déduire que les points A, B, C déterminent le plan $P: x + y + y - 4 = 0$
3. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale $8\sqrt{3}$
4. Soit le point $G\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, un point de l'espace.

a- Montrer que G est le centre de gravité de ABC.

b- Montrer que $[OG]$ est la hauteur issue de O du tétraèdre $OABC$

5. On donne les points I, J et K milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AB]$ et $[BC]$

a- Justifier que $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ et que $\overrightarrow{KI} \wedge \overrightarrow{KJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b- En déduire l'aire du triangle IJK

6. On désigne respectivement par V et V' les volumes des tétraèdres $OABC$ et $OIJK$
Montrer qu'on a : $V' = \frac{1}{4}V$