TS1 : LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE 1 :

A. Dans cette partie on cherche à calculer l'intégrale

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin(2x)+e^{-x}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]dx$$

à l'aide d'une équation différentielle.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y''+2y'+2y=0 \qquad (E_1)$
2. On considère l'équation différentielle $y''+2y'+2y=4\cos(2x)-2\sin(2x) \quad (E)$

a- Déterminer a et b pour que la fonction f_1 définie par : $f_1(x)=asin(2x)+bcos(2x)$ soit solution de l'équation (E).

b- f étant une fonction numérique donnée, on désigne par $g=f-f_1$. Démontrer que la fonction f et solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_1)

c- En déduire la forme générale des fonctions vérifiant l'équation (E).

3. Vérifier que la fonction f solution de (E) telle que $f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'(0)=2$ est la fonction $f(x)=\sin(2x)+e^{-x}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
4. Utiliser (E) pour donner l'ensemble des primitive F de f.
5. En déduire l'intégrale I.

B. On considère l'équation différentielle :

$y'+y=\frac{e^{-x}cosx}{2+sinx}$ (E)

f étant une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $g(x)=e^{x}f(x)$

1. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x)=\frac{cosx}{2+sinx}$
2. Déterminer la solution générale de (E) puis en déduire la solution de (E) qui s'annule en 0
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère la courbe Γ d'équations paramétriques : $\begin{cases}x(t)=\ln(2+sint)\\ y(t)=\ln(1+cost)\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

a- Comparer les points $M(t)$ et $M(t+2\pi)$ ainsi que $M(t)$ et $M\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$

b- En déduire que la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve Γ.

c- Montrer que pour construire Γ, il suffit d'étudier x et y dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}+\pi\right]$

d- Dresser le tableau de variations des fonctions x et y dans $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}+\pi\right]$ puis tracer Γ.

EXERCICE 2 :

1. On donne les équations différentielles : $y''-y=0 \quad (1)$ et $y''+y=2x^2 \quad (2)$

a- Donner la solution générale de chacune de ces équations différentielles.

b- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, deux dérivable et telle que : $f''(x)+f(-x)=x^2$ (3). On pose $g(x)=f(x)-f(-x)$ et $h(x)=f(x)+f(-x)$. Etudier la parité des fonctions g et h.

c- Montrer que g et h sont solutions respectivement des équations (1) et (2).

d- Donner la forme générale des fonctions g et h.

e- En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que : $f(x)=\alpha(e^{x}-e^{-x})+\beta cosx+x^2-2$

f- Vérifier que toute solution de cette forme est solution de l'équation (3).

2. On considère l'équation : $y''+y=0$ (1)

a- Donner l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

b- Etant donné une fonction numérique à variable réelle g, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on définit la fonction f de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$. Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.

c- Soit l'équation différentielle : $y''=-\frac{1}{x^4}y \quad (2)$

Démontrer que la fonction g est solution de (2) si et seulement si la fonction f est solution de (1).

d- En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$

e- Soit g une solution de (2) définie sur $]0,+\infty[$. Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction h définie sur $h(x)=\frac{1}{x^4}g(x)$

f- Calculer l'intégrale : $J=\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^3}sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

EXERCICE 3 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$

a- Déterminer $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$

b- Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$

c- Pour tout entier naturel n, la courbe représentative de $f^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point M_n. Calculer les coordonnées x_n et y_n de M_n.

d- Vérifier que les points M_n appartiennent à la courbe (Γ): $y=\frac{e^{2x}}{4^x}$

e- Vérifier que (x_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme. Etudier la limite de la suite (x_n)

f- Vérifier que (y_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. Etudier la limite de la suite (y_n)

2. On considère les équations différentielles :
$(1+e^x)y'-y=0 \qquad (E_0)$,
$(1+e^x)y'-y=e^{2x} \qquad (E)$

a- Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^x}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

b- Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est solution de (E_0)

c- On pose $z=(1+e^x)y$. Montrer que si y est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ alors z est une solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.

d- En déduire les solution de (E) sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions f définie s par : $f(x)=\frac{ke^x+e^{2x}}{1+e^x}$, $k\in\mathbb{R}$

e- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{2x}-3e^x}{1+e^x}$.
Etudier les variations de f.

f- On note h la restriction de f à $[0;\,+\infty[$. Montrer que h réqlise une bijection de $[0;\,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

g- Expliciter la fonction h^{-1} réciproque de h.

h- Construire sur le même repère les courbes représentatives de f et h^{-1}.
Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{0} ln\left(3+x+\sqrt{x^2+10+9}\right)dx$

EXERCICE 4 :

A. Dans cet exercice n désigne un entier de ≥ 2

I. On considère l'équation différentielle : $y'+ny=x+\frac{1}{n}$ (E) où y désigne la fonction de la variable x et y' sa dérivée.

1. Déterminer une fonction linéaire g solution de (E)
2. Résoudre l'équation différentielle :
$y'+ny=0 \qquad (F)$
3. Démontrer qu'une fonction h est solution de (E) si, et seulement si , $h-g$ est solution de (F).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E)
5. Déterminer la solution de (E) qui donne -1 en 0.

II. On se propose d'étudier la fonction f_n définie sur $[0;\,+\infty[$ par $f_n(x)=\frac{x}{n}-e^{-nx}$

1. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$
2. Calculer $f'_n(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction sur $[0;\,+\infty[$.
3. On admet que pour tout réel x, $e^x\geq x+1$.
Démontrer que l'équation d'inconnue x: $f_n(x)=0$ admet une unique solution dans $\left[\frac{1}{n};1\right]$.
On note cette solution α_n.

III. Dans cette partie on s'intéresse à la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ définie ci – dessus.

1. Vérifier que pour tout entier $n\geq 2$,
$f_{n+1}(\alpha_n)=\frac{e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}(n(e^{\alpha_n}-1)-1)$
2. En utilisant la partie précédente, prouver que pour tout entier $f_{n+1}(\alpha_n)\geq 0$
3. En déduire que la suite est décroissante et est convergente.
4. On note l la limite de cette suite.
Encadrer l par deux entiers consécutifs.
5. Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, $l\leq\alpha_n$ puis $l\leq ne^{-nl}$. En déduire que $l=0$

B. On se propose de résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle définie par : $x^2f''(x)+xf'(x)=0$

1. Montrer que les fonctions $f_1(x)=lnx$ et $f_2(x)=1$ sont des solutions de cette équation
2. On pose $g(x)=xf'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.
A quelle équation différentielle la fonction g satisfait – elle ?
3. En déduire l'intégrale générale de l'équation.
4. On considère l'équation différentielle définie par : $x^2f''(x)+xf'(x)=\frac{4+lnx}{x}$ Intégrer cette équation en cherchant une équation particulière de la forme $x\mapsto\frac{alnx+b}{x}$ où a et b sont des réels.

PROBLEME 1 :

PARTIE A :

Dans cette partie on se propose de résoudre le problème suivant :
Trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;\,+\infty[$, s'annulant pour $x=1$ et vérifiant la propriété :
$\forall\, x>0, xf'(x)-3f(x)=3lnx \qquad (E)$

1. Trouver toutes les fonctions polynôme P du troisième degré telle que, pour tout réel x on a : $xP'(x)-3P(x)=0$
2. Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;\,+\infty[$ telle que $f(1)=0$, soit h la fonction définie sur $]0;\,+\infty[$ par la relation $f(x)=x^3h(x)$

a- Déterminer la valeur de $h(1)$

b- Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$

c- Montrer que f vérifie la propriétè (E) si et seulement si pour tout $x>0$, $h'(x)=\frac{3}{x^4}lnx$

d- On suppose que f vérifie la relation (E).
Montrer que h est définie sur $]0;\,+\infty[$ par $h(x)=\int_1^x\frac{3}{t^4}h(t)\,dt$. Déterminer alors $h(x)$.

3. Montrer qu'il existe une fonction f et une seule solution du problème posé et en donner une expression.

PARTIE B :

Soit f une fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - lnx - \frac{1}{3}$

1. Etudier les variation de f
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f
3. Construire dans un repère orthogonal la courbe représentative C de f sur $]0; 1]$
4. Soit λ un réel strictement positif.

a- A l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\int_1^{\lambda} lnt\ dt$

b- En déduire la valeur de $I(\lambda) = \int_1^{\lambda} f(t)dt$. Donner une interprétation graphique au résultat.

c- Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0} I(\lambda)$

5. Soit un entier naturel $n \geq 2$

a- Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n-1$, montrer que $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

b- En déduire les inégalités : $\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$

c- En utilisant la courbe C et en posant $n = 10$, interpréter graphiquement cet encadrement.

6. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

a- Déduire de l'encadrement précédent que : $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

b- Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda f(\lambda)$ et prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{4}$

PROBLEME 2:

1. Soit l'équation différentielle :

$$(E_m): my'' + 2y' + 2y = 0$$

a- Déterminer suivant les valeurs de m l'ensemble des fonctions 2 fois dérivables solutions de (E_m)

b- Déterminer la solution de (E_1) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$

2. Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ par $f(t) = e^{-t}cost$

a- Etudier les variations de f

b- construire sa courbe représentative dans un repère orthogonale

3. Soit g le prolongement à $\mathbb{R}$ de f

a- Comparer $g(t)$ et $g(t + 2\pi)$. Donner alors le sens de variation de g

b- On pose $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$. On note (c_u) et (c_v) leurs courbes représentatives et (Γ) celle de g dans le même repère. Quels sont les points communs à (Γ) et (c_u) d'une part, à (Γ) et (c_v) d'autre part ?

c- Montrer qu'en chacun de ces points communs les deux courbes ont la même tangente.

d- Démontrer que g admet une limite en $+\infty$

4. Pour tout réel k on pose : $a_k = \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} g(t)dt$

a- Calculer la valeur de a_k

b- Pour tout réel n on pose $s_n = \sum_{k=0}^{n}|a_k|$. Montrer que la suite (s_n) admet une limite. Interpréter géométriquement ce résultat

5. Dans cette question le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la courbe paramétrée (Λ) définie par le système d'équations : $\begin{cases} x(t) = e^{-t}cost \\ y(t) = e^{-t}sint \end{cases}; pour\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

a- Etudier les variations des fonctions x et y et dresser le tableau de variations conjointes

b- Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ et montrer que l'angle $(\overrightarrow{OM_t}; \vec{V_t})$ est constant.

c- Représenter graphiquement (Λ). On précisera les tangentes aux points $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $M(0)$

PROBLEME 3:

PARTIE A :

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = 0$

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}^*{}_+$ dans $\mathbb{R}$, et soit g l'application numérique défini dans $\mathbb{R}^*{}_+$ par $g(x) = \varphi(x)e^x$

2. Vérifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*{}_+$ et démontrer que, pour que φ vérifie $\forall\ x\ \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) + \varphi(x) = -\frac{1}{x} - lnx$ (1) il faut et il suffit que g soit une primitive de l'application $x \mapsto -e^x lnx - \frac{e^x}{x}$
3. Quel est l'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto -e^x lnx - \frac{e^x}{x}$?
4. En déduire que l'ensemble des applications dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) est l'ensemble des applications $x \mapsto ae^x - lnx$ où a désigne une constante réelle.

PARTIE B :

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall\ x\ \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = e^{1-x} - lnx$

1. Etudier les variations de f et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique c et que $c \in]1, 2[$
3. Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0^+} xf(x)$
4. Soit x un élèment de l'intervalle $]0; 1]$. Calculer l'intégrale $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$ en fonction de x. Montrer que lorsque x tend vers 0, $F(x)$ tend vers e
5. Soit n un entier supérieur ou égal à 2

a- Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout réel t tel que $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$, on a : $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$

b- Montrer alors que
$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n} \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

c- En déduire que
$F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

6. Déduire des questions précédentes que, lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ admet une limite et calculer cette limite.

7. Etablir les égalités :
$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\left(1-\frac{k}{n}\right)} = (e-1)\frac{1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}$ et
$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

8. Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites définies par :
$u_n = \frac{1}{n} ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ et $v_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ ont des imites lorsque n tend vers l'infini et calculer ces limites.

PARTIE C :

1. Déterminer le sens de variation de f' dans l'intervalle $[1; 2]$
Soit P l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$\forall\ x\ \in \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$\forall\ x\ \in \mathbb{R}_+^*, P(x) = x - \frac{f(x)}{f'(1)}$

2. Etudier les variations de P dans l'intervalle $[1; 2]$. Montrer que P réalise une bijection de $[1; c]$ sur un intervalle J contenu dans $[1; c]$

3. En déduire que l'on définit bien une suite c_n d'éléments de $[1; c]$ en ce posant $c_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n, c_{n+1} = P(c_n)$

4. Montrer que pour tout :
$x \in [1; 2], 0 \leq P'(x) \leq P'(2) \leq \frac{7}{12}$

5. En utilisant le théorème des accroissements finis, vérifier que pour que entier naturel n,
$|c_{n+1} - c| \leq \frac{7}{12}|c_n - c|$

6. En déduire que la suite (c_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. Quelle valeur suffit – il de donner à n pour que c_n soit une valeurs approchées de c à 10^{-2} prés ?

<u>PROBLEME 4:</u>

PARTIE A :

Soit a un réel non nul, u et v deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = au \end{cases} \qquad (0.1)$$

1. Montrer que u et v vérifient l'équation différentielle : $y'' - ay = 0 \qquad (0.2)$

2. Résoudre l'équation (0.2) suivant les valeurs de a.

3. On suppose que $a = 1$. Déterminer u et v sachant que $u(0) = 3$ et $v(0) = 0$

PARTIE B :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité graphique $2cm$. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan P dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{2}(e^t + e^{-t}) \\ y(t) = \frac{3}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases},\ t \geq 0 \qquad (0.3)$$

L'objet de cette partie est de calculer l'aire du domaine plan délimité par (Γ) et les droites d'équation $y = 0, x = 3$ et $x = 5$

1. Démontrer que (Γ) est une partie de la conique d'équation : $x^2 - y^2 - 9 = 0 \qquad (0.4)$

2. Préciser la nature de cette conique ainsi que ses éléments caractéristiques. Construire (Γ)

3. Soit : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à $x \mapsto x - \sqrt{x^2 - 9}$ et $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ qui à $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{9}{2x}$

a- Etudier les variations de f

b- Montrer que la restriction de f à l'intervalle $I = [3; +\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J à préciser. On note φ cette restriction.

c- Démontrer que pour tout x élément de J, on a : $\varphi^{-1}(x) = g(x)$

d- Tracer C_φ , courbe représentative de φ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

e- Expliquer comment obtenir $C_{\varphi^{-1}}$, courbe représentative de φ^{-1} à partir de C_φ.
Tracer cette courbe dans le même repère.

4. Soit $\beta \in [0; 3]$ et $\alpha = g(\beta)$

a- Calculer $\int_\beta^3 g(x)dx$ et en déduire que
$\int_3^\alpha f(x)dx = \frac{\beta^2}{4} - \frac{9}{4} - \frac{9}{2} ln\left(\frac{\beta}{3}\right)$

b- En déduire l'aire du domaine plan délimité par (Γ) et les droites d'équation : $y = 0, x = 3$ et $x = 5$

PARTIE C :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = g(u_n)\ \ si\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On se propose de calculer de trois façons différentes la limite de la suite (u_n)

1. Etudier les variations de g puis montrer que :
$\forall\ x\ \in \mathbb{N},\ u_n > 3$ et $\forall\ n\ \in \mathbb{N}^*, \frac{g(u_n)-g(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}} > 0$

2. Déterminer le signe de $u_1 - u_0$ puis montrer que (u_n) est monotone.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction g dans un intervalle approprié, montrer que : $\forall\ n\ \in \mathbb{N},\ \frac{g(u_n)-3}{u_n - 3} < \frac{1}{2}$

5. En déduire que : $\forall\ n\ \in \mathbb{N}^*,\ u_n - 3 < \frac{1}{2^{n-1}}$

6. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. Déterminer une valeur possible de n pour que $\ u_n - 3 \leq 10^{-3}$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 3}$

a- Montrer que (lnv_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison b- Expliquer alors que u_n en fonction de n et calculer la limite de (u_n)