TS₁-LES COURBES PLANES : LES CONIQUES

EXERCICE 1 :

On considère, dans un plan orienté, un triangle ABC rectangle en A tels que :

$$AC = 2AB \text{ et } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

On désigne par F le projeté orthogonal de A sur $[BC]$, I le symétrique de F par rapport à (AB) et J le symétrique de F par rapport à (AC) .

Soit S la similitude directe de centre F qui transforme B en A .

1. Déterminer $S((AB))$ et $S((AF))$.
En déduire $S(A)$.
2. Déterminer le rapport de S .
3. Montrer que : A est le milieu de $[IJ]$
4. Montrer que $S(I) = J$ et $CJ = IJ$
5. Soit D le projeté orthogonal de C sur (IB) et K le projeté orthogonal de F sur (IJ) . Les droites (IC) et (FK) se coupent en un point ω .
 - a- Montrer que $IJCD$ est un carré.
 - b- Montrer que ω est le milieu de $[FK]$
6. Soit Γ la parabole de foyer F et de directrice (IJ) .
 - a- Montrer que B et C appartiennent à Γ .
 - b- Déterminer les tangentes à Γ en B et C .
 - c- Montrer que Γ est l'unique parabole de directrice (IJ) et passant par B et C .
 - d- Construire les points d'intersection de la parabole et de la droite (AF) .
 - e- Soit Γ' la parabole de foyer F et de directrice la droite (IB) . Déterminer les points d'intersections de Γ et Γ'

EXERCICE 2 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit (Δ) l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$

$$\text{tels que : } \begin{cases} x(t) = \frac{2}{\cos t} & t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ y(t) = 3 \tan t \end{cases}$$

1. Comment $M(-t)$ se déduit de $M(t)$?
En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie et déterminer le domaine d'étude utile.
Etudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$
2. Démontrer que (Γ) est contenu dans une hyperbole (H) donner on donnera l'équation et les éléments caractéristiques. On notera (D) et (D') les asymptotes, A et A' les sommets de (H)
Construire (H) et préciser la partie de (H) correspondant à la courbe (Γ)
3. Soit un $M(t_0)$ point de (Γ) .
La tangente (Δ) à (Γ) en $M(t_0)$ coupe les asymptotes (D) et (D') en A_0 et B_0 .
 - a- Démontrer que la tangente (Δ) à (Γ) en $M(t_0)$ a pour équation :
 $(\Delta) : 3x - 2(\sin t_0)y - 6 \cos t_0 = 0$

- b- Donner les coordonnées de A_0 et B_0 en fonction de t_0 . Vérifier que $M(t_0)$ est le milieu du segment $[A_0B_0]$
4. Soit $F_1(0; 3)$ et $F_2(0; -3)$ dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant : $MF_1 + MF_2 = 10$ et f l'affinité orthogonale de base (xx') et de rapport k .
Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E) puis représenter (E)

EXERCICE 3 :

Le plan est muni du repère ortho normal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (unité graphique 2cm).

On désigne par ε l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

S est la similitude de centre O , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et ε_1 est l'image de ε par S .

1. Donner les coordonnées des sommets de ε et placer ces points dans P .
2. L'un des foyers de ε est F et Δ est la directrice qui lui est associée. On désigne par M un point de ε et par H son projeté orthogonal sur Δ .
Donner la valeur de $\frac{MF}{MH}$.

3. On note Δ_1, F_1, H_1, M_1 les images respectives de Δ, F, H, M par la similitude S .

- a- Montrer que pour tout point M de ε on a $\frac{MF}{MH} =$

$$\frac{M_1F_1}{M_1H_1}$$

- b- Prouvez que ε_1 est l'ellipse de foyer F_1 ayant Δ_1 pour directrice associée et d'excentricité $\frac{\sqrt{5}}{3}$.
Quels sont les deux axes de ε_1 ?

4. z et z_1 sont les affixes respectives de M et de son image M_1 par S ;
Montrer que $z_1 = \frac{1}{2}(1+i)z$ et que si $M \neq O$, le triangle OMM_1 est rectangle isocèle en M_1 .
5. Décrire la construction du point M_1 à partir du point M donné distinct de O .
6. Construire les foyers et sommets de ε_1
construire ε et ε_1

EXERCICE 4 :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (E) l'ensemble des points de (P) vérifiant : $15x^2 + 13y^2 - 2xy\sqrt{3} - 768 = 0$ et soit f l'application de (P) dans (P) qui à tout point $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(x + \sqrt{3}y) \\ y' = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x + y) \end{cases}$$

1. Montrer que f est une similitude plane directe dont on donnera l'écriture complexe.
2. Caractériser f est déterminer f^{-1}
3. Déterminer une équation de $f((E))$ et montrer que $f((E))$ est une ellipse dont on précisera les sommets, les foyers et l'excentricité.

LYCEE COLUMBA NDOFFENE DIOUF 19 - 20

4. En déduire que (E) est l'ensemble des points M de (P) tels que $MF_1 + MF_2 = 16$ où F_1 et F_2 sont des points que l'on précisera.
5. Dans le plan P rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite $D : 2x - y + 1 = 0$ et le cercle (C) de centre $A(1,1)$ et de rayon $r = 2$.
Soit (C') l'image de (C) par l'affinité orthogonale de base D et de rapport $k = 2$.
Donner une équation de (C') et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de (C') .

EXERCICE 5 :

- A.** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation : $y^2 = 4x - 4$

1. Déterminer le foyer et la direction de $\mathcal{P}$ puis la tracer.
 2. Calculer l'aire de la partie délimitée par la parabole $\mathcal{P}$ et la droite d'équation : $x = 3$
 3. Soit $F(a; b)$ un point du plan tel que $a > 0$ et soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer F et de directrice la droite des ordonnées.
- a- Prouver qu'une équation de $\mathcal{P}$ est : $(y - b)^2 = 2ax - a^2$
- b- Montrer que $\mathcal{P}$ passe par le point $A(1, 0)$ si et seulement si F appartient au cercle de centre A et de rayon 1 privé de O .
- c- Soit S le sommet de la parabole $\mathcal{P}$. Déterminer et construire l'ensemble des points S lorsque F décrit C privé de O .
- d- Soient F_1 et F_2 deux points du cercle C privé de O et $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les paraboles correspondantes. Montrer que les tangentes en A aux paraboles $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont perpendiculaires, si et seulement si, F_1 et F_2 sont diamétralement opposés sur C .

- B.** Le plan complexe est muni à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer O et de directrice la droite D d'équation $x = -2$

1. Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $y^2 = 4x + 4$
 2. Tracer la parabole $\mathcal{P}$, on désigne par S son sommet.
 3. Soit le point $A(-2; \frac{3}{2})$
- a- Déterminer, par leurs équations, les tangentes à $\mathcal{P}$ issues du point A . On notera T_1 et T_2 ces tangentes, M_1 et M_2 leurs points de contact respectifs sur la parabole $\mathcal{P}$
- b- Tracer les tangentes T_1 et T_2 .
Montrer qu'elles sont perpendiculaires et que les points O, M_1, M_2 sont alignés.
4. Soit M le point de $\mathcal{P}$ d'affixe z d'affixe $z = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif.
- a- Prouver que $\theta \equiv 0[2\pi]$
- b- Montrer que : $r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$
5. Soit M un point de $\mathcal{P}$ distinct de S , la droite (OM) recoupe $\mathcal{P}$ en M' .
- a- Déterminer la valeur minimale de la distance MM'

- b- Soient N et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur l'axe de $\mathcal{P}$.
Montrer que la valeur du produit $MN \cdot M'N'$ est une constante que l'on déterminera.

EXERCICE 6 :

- A.** Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m) : z^2 - 2mz - 2(1 + i) = 0$ où m un nombre complexe.
On désigne par M le point d'affixe m et par M_1 et M_2 les points images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_m)
On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M d'affixe m pour lesquels le triangle OM_1M_2 est rectangle en O .
1. Résoudre l'équation (E_m) pour $m = i\sqrt{2}$.
Le point $M(i\sqrt{2})$ appartient-il à $\mathcal{H}$?
 2. Soit Δ' le discriminant réduit de (E_m)
 - a- Montrer que $M(m) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |m|^2 = |\Delta'|$
 - b- En déduire qu'une équation réduite de $\mathcal{H}$ est : $x^2 - y^2 + 2xy + 2 = 0$
 3. Soit S la similitude direct de centre O , de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{8}$
 - a- Soit $M(m)$ et $M'(m') = S(M)$.
Exprimer m^2 l'aide de m'^2
 - b- En déduire qu'une équation de la courbe $\mathcal{H}' = S(\mathcal{H})$ est $X^2 - Y^2 + 1 = 0$
 - c- Donner la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $\mathcal{H}'$.
 - d- Prouver que la courbe $\mathcal{H}$ est une hyperbole équilatère. Construire $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

- B.** Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit m un réel positif et Γ_m l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $mx^2 + (m + 1)y^2 - 2x = 0$

1. Montrer que Γ_0 est une parabole dont on précisera les coordonnées de son foyer et dont on donnera une équation de sa directrice.
2. Dans la suite on suppose que $m > 0$
 - a- Montrer que Γ_m est une ellipse dont on précisera les coordonnées de l'un de ses foyers et une équation de sa directrice associée.
 - b- Donner une équation de la tangente à Γ_m au point origine O .
3. Soit M un point de $\Gamma_m \setminus \{O\}$ d'affixe z tel que $\arg(z) \equiv 0[2\pi]$. Montrer que $OM = \frac{2\cos\theta}{m + \sin^2\theta}$

EXERCICE 7 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

PARTIE A :

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère la courbe (ζ) d'équation : $y^2 - x^2 = 16$

1. Montrer que (ζ) est la réunion de deux courbes Ψ et Ψ' où Ψ est la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$

où Ψ' est l'image de Ψ par une transformation simple que l'on précisera.

- Etudier la fonction f (limites aux bornes et sens de variation)
- Montrer que la droite $(D): y = x$ est asymptote à Ψ
- Tracer Ψ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ défini ci-dessus
- On nomme A et B les points de la courbe Ψ d'abscisse respectives -3 et 3 .

On considère le domaine D du plan constitué des points $M(x; y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{x^2 + 16} \leq y \leq 5 \end{cases}$$

Hachurer le domaine D et exprimer l'aire de D à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

PARTIE B :

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

- Donner l'écriture complexe de la transformation r
- On désigne par x' et y' les coordonnées du point M' image du point $M(x; y)$ du plan.

a- Vérifier que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \end{cases}$$

- Déterminer les coordonnées des points A' et B' , images respectives des points A et B par r .
 - Placer A' et B' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$
3. Soit (ζ') l'hyperbole d'équation cartésienne :
- $$xy = 8$$

- Tracer cette hyperbole (ζ') dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$
 - Montrer que l'hyperbole (ζ') est l'image de la courbe (ζ) par la rotation r .
4. Soit D' l'image de D par la rotation r . On admet que D' est l'ensemble des points $M(x; y)$

du plan vérifiant :

$$\begin{cases} \sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2} \\ \frac{8}{x} \leq y \leq 5\sqrt{2} - x \end{cases}$$

- Hachurer le domaine du plan D'
- Calculer l'aire de D' , exprimée en cm^2 .
- En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire D .

EXERCICE 8 :

PARTIE A :

(P) est le plan euclidien muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit φ l'application de (P) dans (P) définie analytiquement par :

Montrez que (P) est une isométrie affine de (P) que l'on précisera.

- On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
- $$f_a(x) = \frac{(a+2)x}{x+2-a}$$
- a étant un paramètre réel appartenant à $\mathbb{R} - \{-2; +2\}$ et l'on appelle (C_a) la courbe représentative de f_a dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de (P)

- Montrez que, pour tout a de $\mathbb{R} - \{-2; +2\}$, (C_a) est globalement invariante par φ
- Montrez que toutes les courbes (C_a) passent deux points fixes indépendants de a .
- Etudiez les variations de f_a et construisez dans le repère $\mathbb{R} - \{-2; +2\}$ les courbes (C_{-1}) et $(C_{\frac{3}{2}})$. (on prendra pour unité graphique 5 cm)

PARTIE B :

Soit w_a le point de coordonnées $(a-2; a+2)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de (P) et les vecteurs définis par :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) \text{ et } \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$$

- Montrez que $R_a = (w_a, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est repère orthonormé du plan (P) .
- Déterminez une équation de (C_a) dans le repère $R_a = (w_a, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Déduisez-en que (C_a) est une hyperbole équilatère dont on précisera les sommets les points A et A' .
- a- Soit (D) la droite d'équation $y = x + 4$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrez pour tout point M de (D) , à l'exclusion d'un seul que l'on précisera, il passe une courbe (C_a) unique.
b- Montrez que (C_a) a ses sommets sur (D) si et seulement si $|a| > 0$.
- Déduisez-en l'ensemble des points A et A' lorsque a varie dans $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$
- On suppose que $|a| < 2$.
a- Evaluer en fonction de a les distances $w_0 w_a$ et $w_a A$; déduisez-en la distance $w_0 A$.
b- Déterminez l'ensemble des points A et A' lorsque a varie dans $]-2; +2[$.

PARTIE C :

Dans cette partie on suppose que a est un élément de l'intervalle $I =]0, 2[$.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par U_0 et par la relation de récurrence : $U_{n+1} = f_a(U_n)$
On suppose que U_0 appartient à $]0, 2a[$.

- Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in]0; 2a[$.
- Déduisez-en que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est partout définie.
- Que peut-on dire de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $U_0 = 0$ ou $U_0 = 2a$?
- On suppose que U_0 est différent de 0 et $2a$ Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}, (U_n \neq 0 \text{ et } U_{2n} \neq 2a)$
- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = \frac{U_n}{U_n - 2a}$
a- Montrez que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de a
b- Etudiez l'existence et la valeur de la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, déduisez-en l'existence et la valeur de la limite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 9 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est le centimètre

A. Soient f et g les fonctions numériques dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{1}{3}(-5x + 4\sqrt{x^2 + 15}) \text{ et}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}(-5x - 4\sqrt{x^2 + 15})$$

On note (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions f et g

- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{3}x$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.
- Justifier que la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ)

Dans la suite du problème, on admettra que la droite (Δ') : $y - 3x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et que la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ') .

- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
Démontrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variation
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes de coordonnées.
- Construire (Δ) , (Δ') et la courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- Démontrer que la courbe (C') est l'image de la courbe (C) par la symétrie de centre O .
- Construire la courbe (C') dans le même repère que la courbe (C)

B. Dans cette partie, on admettra que l'image d'une hyperbole (H) de foyers F et F' , de sommets A et A' par une similitude directe s , est une hyperbole (H') de foyers $s(F)$ et $s(F')$, de sommets $s(A)$ et $s(A')$. On note (H) la courbe d'équation : $3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0$

- Démontrer que $(H) : (C) \cup (C')$
- Soit s la similitude directe de centre O , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
Soit x, x', y et y' des nombres réels. Pour tout point M d'affixe $z = x + iy$, on note M' le point d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $M' = s(M)$
 - Déterminer l'écriture complexe de la similitude s
 - Justifier que $x' = \frac{1}{2}(x + y)$ et $y' = \frac{1}{2}(-x + y)$
 - En déduire que le point M appartient à (H) si et seulement si le point M' appartient à $(\Gamma) : x^2 - y^2 = 20$
- Justifier que (Γ) est une hyperbole puis déterminer les coordonnées de ses foyers et de ses sommets.
- Déterminer l'excentricité e de l'hyperbole (Γ) .
- Construire (Γ) et ses asymptotes dans le même repère que (H)
- Déduire des questions précédentes que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.

EXERCICE 10 :

Le plan (P) est muni à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $(C_m) : y^2 = mx^2 - (m - 1)x - 3(2m + 1)$ où m est un paramètre réel.

PARTIE I :

- Montrer que quel que soit le réel m , la courbe (C_m) passe par un point fixe A dont on donnera les coordonnées.
 - On suppose que m est non nul.
 - Montrer que (C_m) est une conique à centre dont le centre $I_m(\frac{m-1}{2m}; 0)$
 - Préciser suivant les valeurs de m , si (C_m) est une ellipse ou une hyperbole.
 - Construire (C_1) et (C_{-1}) dans le même repère.
 - Soit $(\alpha; \beta)$ un couple de nombres complexes et f la transformation du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \alpha z + \beta$
 - Déterminer α et β sachant que les points $A(3; 0)$ et $B(-3; 0)$ ont pour images $A'(3; -3)$ et $B'(-3; 3)$
 - Donner la nature de f , puis déterminer ses éléments caractéristiques.
- Dans la suite du problème, f est la transformation ainsi déterminée.
- Justifier que l'ensemble (C'_{-1}) , image de (C_{-1}) par f est un cercle dont on précisera le centre et calculera le rayon.
 - Soit $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$, image de M par f .
 - Exprimer x' et y' en fonction de x et y
 - Exprimer x et y en fonction de x' et y'
 - En déduire une équation cartésienne de (C'_1) image de (C_1) par f .
 - Construire la courbe (C'_1) dans le repère précédent.

PARTIE II :

- Soit (D) la droite d'équation : $5x - 2y - 21 = 0$
- Déterminer une équation de (D) , image de (D) par la transformation f .
 - E et F (F est le point d'ordonnée positive) sont les points d'intersection de (C_1) et (D) , E' et F' les images respectives des points E et F par f .
Déterminer les coordonnées des points E' et F'
 - Soit (S) la surface délimitée par la courbe (C_1) et le segment $[EF]$ et (S') son image par f . Calculer l'aire $A(S')$ de (S') puis en déduire $A(S)$ de (S) .
 - On prend $m = 0$
 - Quelle est la nature de (C_0) ?
 - Tracer (C_0) dans un autre repère.
 - Soit G le barycentre du système $\{(A, 1); (B, 1); (M, 1)\}$ où M est un point de (C_0) , A et B sont les points définis dans la partie I. On note (Γ_0) la courbe décrite par G lorsque M parcourt la courbe (C_0)
Démontrer que (Γ_0) est l'image de (C_0) par une homothétie de centre $K(1; 0)$ préciser le rapport.