

TS1 : CALCUL INTEGRAL

EXERCICE 1 :

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^3 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) dx; \quad \int_1^2 x(x+1)^3 dx;$$

$$\int_{-1}^1 (2x+1)(x^2+x-5)^3 dx; \quad \int_1^2 \sqrt{2x+1} dx$$

$$\int_1^2 \frac{dt}{(1+t)^2}; \quad \int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{2t+1}}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt$$

$$\int_{-2}^1 |t(t+1)| dt; \quad \int_{-3}^3 |t^3+t| dt; \quad \int_0^3 |2t-1| dt$$

$$\int_0^4 |t-2| dt; \quad \int_{-1}^2 (x-|x-1|) dx; \quad \int_0^{2\pi} |\sin t| dt;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx; \quad \int_{-1}^1 \frac{x^{2009}}{x^{14}} dx;$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx; \quad \int_0^1 t \sin(t) dt; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin(t) dt;$$

$$\int_0^1 t \sqrt{1-t} dt; \quad \int_0^1 (2t+1) \sin \pi(t^2+t+1) dt;$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3 - \sin 2x}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx;$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x - \sin x}{x} dx; \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x - \frac{1}{\tan x} \right) dx$$

2. En utilisant une ou des intégrations par partie, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$\int_1^2 t \sqrt{3-t} dt; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} dt; \quad \int_0^1 t \sqrt{t+1} dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 3x dx; \quad \int_0^{\pi} (x^2 - 5x + 1) \cos 2x dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \sin x dx; \quad \int_0^{\pi} (3x^3 - 3) \cos 2x dx$$

3. A l'aide d'un changement de variable affine, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-\frac{5}{2}}^{-2} (2x+5)^7 dx; \quad \int_0^1 \sqrt{x+2} dx; \quad \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\int_1^2 t \sqrt{5-t} dt; \quad \int_0^1 t \sqrt{t+3} dt; \quad \int_{-8}^{-3} t \sqrt{1-t} dt$$

EXERCICE 2 :

- A. Pour tout entier naturel n , on définit la suite (S_n)

$$\text{par : } S_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$$

1. Justifier pour k entier naturel non nul

$$\text{l'encadrement : } \frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^3} \leq \frac{1}{k^3}$$

2. En déduire l'encadrement :

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^3} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{dx}{x^3} + 1$$

3. Que peut-on dire de la suite (S_n) ?

4. A l'aide d'un encadrement analogue, montrer que la suite (T_n) définie par :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \text{ est convergente}$$

- B. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$

1. Quel est le signe de $\int_a^b [f(t) + xg(t)]^2 dt$, où x désigne un nombre réel ?

2. En déduire l'égalité de **Schwarz** :

$$\left[\int_a^b f(t)g(t) dt \right]^2 \leq \int_a^b [f(t)]^2 dt \times \int_a^b [g(t)]^2 dt$$

3. Démontrer que si f et g sont positives sur $[a; b]$, ($a < b$) et pour x de $[a; b]$: $f(x) \times g(x) \geq 1$

$$\text{alors } \int_a^b f(x) dx \times \int_a^b g(x) dx \geq (b-a)^2$$

4. Soient h et φ des fonctions continues sur $[a; b]$ avec $a < b$:

- a- Justifier l'existence de deux réels m et M tel que pour tout x de $[a; b]$, $m \leq h(x) \leq M$
- b- Démontrer que si $\varphi(x)$ garde un signe constant sur $[a; b]$, alors $m \leq \frac{\int_a^b h(t)\varphi(t) dt}{\int_a^b \varphi(t) dt} \leq M$

- C. L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (I_n) définie par : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt$ et pour n non nul

$$I_1 = \int_0^1 t \sqrt{1+t} dt \text{ et } I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt$$

1. Calculer I_0 puis I_1 par une intégration par parties.

2. Comparer I^n et I^{n+1} lorsque $0 \leq t \leq 1$ puis en déduire que la suite (I_n) est décroissante.

3. En utilisant un encadrement de $\sqrt{1+t}$ dans l'intervalle $[0; 1]$, établir que : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

4. Démontrer que, pour tout réel t de $[0; 1]$ on a : $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$.

5. En déduire que : $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

6. Déduisez-en que la limite de nI_n en $+\infty$ puis celle de I_n .

EXERCICE 3 :

1. La suite de Wallis définie par :

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \text{ où } n \text{ est un entier naturel}$$

- a- Calculer W_0 et W_1 .

- b- Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

- c- Montrer que, pour tout entier naturel $W_n \geq 0$. En déduire que la suite (W_n) est convergente.

- d- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$

- e- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{\pi C_{2n}^n}{2 \times 4^n}$

$$\text{et que } W_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

- f- Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$0 < \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \leq 1.$$

$$\text{En déduire que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = 1$$

- g- Etablir la formule de Wallis :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{13 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \right)^2 \times \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

- h- Montrer que la suite (U_n) définie par :

$$U_n = (n+1)W_n \text{ est constante.}$$

2. Soit pour tout réel t tel que :

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} : I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) dt \text{ et}$$

$$J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{2 \cos^{2k}}(t) dt \text{ où } k \in \mathbb{N}$$

- a- Etablir l'inégalité suivante pour tout t tel que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$: $t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$

- b- Etablir l'inégalité suivante pour tout k tel que $k \geq 0 : 0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+1})$
- c- Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq 0 : I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k$
- d- Dédire de ces résultats que : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{J_k}{I_k} = 0$
- e- Montrer que pour tout k tel que $k \geq 1 : I_k = -2k^2 J_k + k(2k-1) J_{k-1}$
- f- En déduire que pour tout entier k tel que $k \geq 1 : \frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$
- g- En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$

PROBLEME 1 :

PARTIE A :

Soit (E) l'ensemble des fonctions f , telles que f est dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée f' est continue sur $[a, b]$ et on a $f(a) = f(b) = 0$, ($a < b$).

Soit pour toute fonction de $(E) : U(f) = \int_a^b f(x) dx$

Il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout x de $[a, b] : |f'(x)| \leq M$

1. Montrer que $U(f) = -\frac{1}{2} \int_a^b (2x-a) f'(x) dx$
2. Montrer que : $\int_a^{a+b} (a+b-2x) dx = \int_{a+b}^b (2x-a-b) dx = \frac{(b-a)^2}{4}$
3. En déduire que : $|U(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M$

PARTIE B :

Soit la fonction g définie sur l'intervalle

$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ par : $g(x) = \sqrt{(3-4x)^3(4x-1)^3}$

1. Montrer que la fonction $g \in (E)$.
2. Dresser le tableau de variation de g .
3. Construire (C) , courbe représentative de g dans un repère orthogonal $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
4. Montrer que $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} g(x) dx \leq \frac{3}{8}$
5. En déduire que : $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (5 - 16x^2) \sqrt{(3-4x)(4x-1)} dx \leq \frac{3}{8}$
6. Soit h la restriction de g sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$
 - a- Montrer que h est bijection de $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b- Montrer que pour tout réel x de J :

$$(h)^{-1}(x) = \frac{2 - \sqrt{1-3\sqrt{x}}}{4}$$

- c- Montrer que $2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} g(x) dx + 4 \int_0^1 h^{-1}(x) dx = 1$

PROBLEME 2 :

- A. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_{-x}^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $F'(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{1+x^2}$

2. Calculer $F(0)$. En déduire que si f est impaire alors F est nulle.
3. Montrer que si f est paire alors pour tout réel x on a : $F(x) = 2 \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$
4. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{3x^2+2x+3}{1+x^2}$
 - a- Etudier g et tracer sa courbe (ε) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 - b- En utilisant 1°) montrer que : $\int_{-x}^x g(t) dt = 6x$
 - c- Calculer en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par (ε) , l'axe des abscisse et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$

- B. Soit G la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$ par :

$$G(x) = \int_0^{tgx} \frac{dt}{1+t^2}$$

1. Montrer que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$ et calculer $G'(x)$

2. Calculer $G(0)$ et déduire $G\left(\frac{\pi}{8}\right)$

3. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

- a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}. \text{ En déduire la limite de } (u_n)$$

- b- Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1}$ pour $n \geq 1$
- c- Calculer alors u_1, u_2 et u_3
4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{2k} \times x^{2k} = \frac{1 + (-1)^{n+1} x^{2n}}{1+x^2}$$

- b- En déduire que : $v_n = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$

- c- Exprimer alors v_n en fonction de u_{n+1} et u_0 et en déduire que (v_n) est convergente et calculer sa limite.

PROBLEME 3 :

PARTIE A :

1. On considère la fonction ϕ définie sur $[0; +\infty[$ par $\phi(x) = \sin t - t + \frac{t^3}{6}$.

Dresser le tableau de variation de ϕ , ϕ' et ϕ puis en déduire : (1) $\forall t \in [0, +\infty[, t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t$

2. A tout réel x fixé, on associe la fonction f_x définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f_x(t) = \cos(x \sin t)$

On désigne par (Γ_x) la représentation graphique de f_x dans un repère orthonormé du plan (unité graphique : 4 cm).

- a- Pour les valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$ de x , étudier f_x (continuité, dérivabilité, sens de variation)

- b- Construire (Γ_x) dans chacun des cas précédents.
Dans la partie suivante, on ne cherchera pas à calculer les primitives des fonctions f_x .

PARTIE B : A tout réel x on associe l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_x(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) dt.$$

On se propose d'étudier la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

- Montrer que, $\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2$, on a :
 - $F(x+h) - F(x) = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{h}{2} \sin t\right) \cdot \sin\left(\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin t\right) dt$
 - $\left| \sin\left(\frac{h}{2} \sin t\right) \cdot \sin\left(\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin t\right) \right| \leq \left| \frac{h}{2} \right|$
 - $|F(x+h) - F(x)| \leq \frac{\pi|h|}{2}$
- En déduire de ce précède que F est continue sur $\mathbb{R}$ et monotone sur $[0; \pi]$.
- Soit x un réel fixé.

Pour tout réel non nul h , on pose :

$$\Delta(h) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin\left(\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin t\right) dt.$$

- En utilisant (1), montrer que :

$$\left| \sin\left(\frac{h}{2} \sin t\right) - \frac{h}{2} \sin t \right| \leq \frac{|h|^3}{48} |\sin t| \leq \frac{|h|^3}{48}$$
- Etablir que : $|\Delta(h)| \leq \frac{\pi|h|^2}{48}$.
- En déduire que : $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(h) = 0$.
- Montrer que F est dérivable au point x .
- On se propose de trouver un encadrement du réel $F(\pi)$. On pose $(\pi) = I + J$, où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(\pi \sin t) dt \text{ et } J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos(\pi \sin t) dt.$$

On désigne par A, B, C les points d'abscisses respectives $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ de la courbe (Γ_π) .

- Par des considérations d'aires, montrer que : $0 < I < \frac{\pi}{6}$.
- Soit $g : t \mapsto at + b$ la fonction affine qui est représentée par la droite (BC).
 On pose $k = g - f_\pi$
 - Vérifier que : $\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right], h''(t) \leq 0$
 et que $h'\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$ et $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.
 - En déduire que : $\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right], h(x) \geq 0$.
 - Par des considérations d'aires, montrer que : $-\frac{\pi}{3} < J < -\frac{\pi}{6}$.

Conclure et représenter graphiquement la variation de la restriction de F à $[0; \pi]$

PROBLEME 4 :

On considère la suite (u_n) sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Le but de ce problème est de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6} \text{ appelé résultat de Bernoulli}$$

- A.** Soit la suite (v_n) par $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:
- $$v_n = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \times n}$$

- Trouver deux réels A et B tels que :

$$\frac{1}{n \times (n-1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n}$$

- En déduire que pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$: $v_n = 2 - \frac{1}{n}$
- Montrer que la suite (u_n) est croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $u_n \leq v_n$
- En déduire que la suite (u_n) est majorée. Conclure
- On rappelle que si q est un nombre complexe différent de 1 et n un entier naturel :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Soit t un élément de $[0; \pi]$: on pose pour tout n entier naturel non nul,

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos kt \text{ et } S_n(t) = \sum_{k=1}^n \sin kt$$

- Exprimer le complexe $Z = C_n(t) + iS_n(t)$
- En déduire que $t \in [0; \pi]$, $C_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$
 et que si $t = 0$, $C_n(t) = n$
- L'application C_n de $[0; \pi]$ vers $\mathbb{R}$ est-elle continue sur $[0; \pi]$?
- Vérifier que pour tout $t \in]0; \pi[$ on a : $1 + 2C_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$
- Montrer que l'application $g(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ définie sur $[0; \pi]$ est-elle continue sur cet intervalle ?

- Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

- En déduire que $u_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_n(t) dt$.

$$\text{Vérifier que } \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt = \frac{\pi^2}{6} \text{ et}$$

- En déduire que $\forall n$ de $\mathbb{N}^*$,
 $\frac{\pi^2}{6} - u_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) g_n(t) dt$ où g_n est une fonction que l'on précisera.

- B.** On considère la fonction numérique f définie

$$\text{sur } [0; \pi] \text{ par : } \begin{cases} f(0) = 2 \\ f(x) = \frac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ si } t \in]0; \pi[\end{cases}$$

- Vérifier que $\frac{\pi^2}{6} - u_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$
- Montrer que f est continue sur l'intervalle $[0; \pi]$
- Justifier que f est dérivable sur $]0; \pi[$ puis étudier la dérivabilité de f en 0.

- On pose pour tout n élément de $\mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$$

- Montrer en utilisant une intégration par parties que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$
- En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi^2}{6} - u_n\right) = 0$. Conclure.