

TS1 : FONCTION EXPONENTIELLE – FONCTION PUISSANCE :

EXERCICE 1 :

1. Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - e^x); \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - e^{2x}); \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2e^{-x} - \frac{1}{x}\right) \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-(1-x)}; \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 3)e^x; \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)e^x \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - e^{2x}); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - e^x}{x^2 + x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{2x} - e^x); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{2x}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{-x}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{e^x + 1}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3})^x; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{2^{x^2+x}}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 3^{x+1}}{2^x + 2^{x-1}} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}\right) \ln x; \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - e^x; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{2^x} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\sin x}; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{\cos(x) - 1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}; \\ & \lim_{x \rightarrow 0^-} |x|^{\frac{1}{x}}; \lim_{x \rightarrow 0} (3^{\sin x})^{\frac{1}{x}}; \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{\sin(x-1)}}; \lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^{\frac{1}{x}}; \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}; \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^x; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}; \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}, a \text{ et } b \in \mathbb{R}_*^+; \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1)^x \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{(x^a)}}{x^{(a^x)}} \text{ avec } a > 1; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - e^x) \end{aligned}$$

2. Soient a et b deux réels strictement positifs.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - b^x}{x}\right)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - b^x}{e^x - e^{-x}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [n(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})]$.

3. Calculer, si possible, les limites suivantes :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - x^2); \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^x}{x^x}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^x - x^2}{x^3 + 3^x}\right) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x}\right); \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{|x|^{\frac{1}{2}}}\right); \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

EXERCICE 2 :

1. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I :

$$\begin{aligned} \text{a- } & f(x) = x e^{x^2+1}, I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}, I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ \text{b- } & f(x) = \sin(2x) e^{\cos^2 x}, I = \mathbb{R}; f(x) = \sqrt{e^x}, I = \mathbb{R} \\ \text{c- } & f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}, I =]1; +\infty[; f(x) = x e^{2x^2}, I = \mathbb{R} \\ \text{d- } & f(x) = \frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}, I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}, I = \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx; \int_1^2 \frac{dx}{1+e^x}; \int_1^2 \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx \\ & \int_0^1 \frac{x^3}{e^{x^2}} dx; \int_0^{-\ln 2} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx; \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin(x) dx \\ & \int_0^1 3^x dx; \int_0^{-1} \frac{3^x}{1+3^x} dx; \int_0^{\ln(2)} 2^x (1+2^x)^2 dx \end{aligned}$$

3. L'objectif de cette question est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \cos^2(x) dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \sin^2(x) dx$$

a- Montrer que $I + J = \frac{\sqrt{2\pi} - 1}{\ln 2}$

b- Soit $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \cos(2x) dx$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$K = -\frac{\ln 2}{2} \left[\frac{\sqrt{2\pi}+1}{2} + \frac{\ln 2}{2} K \right].$$

En déduire la valeur de $I - J$

c- Donner les valeurs de I et J .

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

a- Calculer les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ de f .

b- Pour tout entier naturel n non nul, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f . Montrer que :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (x^2 + a_n x + b_n) e^{-x}$$

Où a_n et b_n sont des réels.

c- Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

d- Donner l'expression de a_n et b_n en fonction de n .

e- En déduire l'expression de $f^{(100)}$.

EXERCICE 3 :

A. Soit x un nombre réel

1. Démontrer que pour tout nombre réel x , on a :

$$-1 < \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1} < 1$$

2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $] -1; 1[$

$$\text{définie par : } f(x) = \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1}$$

a- Démontrer que f est une application

b- Etudier le sens de variation de f .

c- Dresser le tableau de variation de f

d- Construire la courbe C_f représentative de dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de 2cm.

e- Justifier que f est une bijection.

3. Soit g la bijection réciproque de f .

a- Justifier que g est dérivable sur $] -1; 1[$

b- Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $] -1; 1[$.

B. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(e^x + e^{-x})$. on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 3cm)

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$

2. Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$ on a : $g(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$. En déduire que la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote à (C)

3. Etudier la position relative de (C) et Δ

4. Dresser le tableau de variations de la fonction g

5. Tracer dans le repère précédent Δ et (C)

Pour tout réel de $[0; +\infty[$, on pose

$$G(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt$$

6. Soit n un entier naturel, donner une interprétation graphique de $G(n)$

7. Etudier le sens de variation de G
8. Démontrer que pour tout $t > 0$, on a :

$$\frac{t}{t+1} \leq \ln(1+t) \leq t$$

9. En déduire que $\forall x > 0$, on a :

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln(1+e^{-2x})}{2} \leq G(x) \leq \frac{1-e^{-2x}}{2}$$

10. On admet G admet une limite notée l .

$$\text{Etablir alors que } \frac{\ln 2}{2} \leq l \leq \frac{1}{2}$$

11. Pour tout entier naturel n on pose :

$$u_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t}) dt$$

- a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\ln(1+e^{-2(n+1)}) \leq u_n \leq \ln(1+e^{-2n})$$

- b- En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

- c- Déterminer la limite de la suite (u_n)

12. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- a- Exprimer S_n à l'aide de F et n .

- b- La suite (S_n) est-elle convergente ?

Dans l'affirmative donner alors sa limite.

PROBLEME 1 :

- A. Soit f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_0(x) = e^{-x^2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

$f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. on désigne par (C_n) la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

1. Montrer que $\Delta: y = 0$ est une asymptote à (C_n)
2. Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe I que l'on précisera.

3. Etudier les variations de f_n pour $n \geq 2$.
En déduire que (C_n) admet une unique tangente parallèle à l'axe $(O, \vec{i})$ en un point d'abscisse non nul x_n et d'ordonnée y_n .

4. On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = e^{\frac{x}{2} \log(\frac{x}{2e})}$

- a- Dresser le tableau de variations de h et vérifier pour $n \geq 2$, $h(n) = y_n$.

- b- En déduire que $y_n \geq y_2$. La suite (y_n) est-elle convergente ?

- c- Dresser le tableau de variations de f_1 .

- d- Ecrire l'équation de la tangente Δ à C_1 au point d'abscisse 0. Etudier la position de Δ et C_1 .

5. Etudier les positions relatives de C_1 et C_3 puis tracer les courbes C_1 et C_3 .

6. On désigne par A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par C_n , les axes de coordonnées et la droite $x = 1$. Calculer A_1 et A_3

7. Montrer que f_0 réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers $]0; 1]$. Expliciter $f_0^{-1}(x)$.

$$\text{En déduire alors que } A_0 = \frac{1}{e} + \int_{\frac{1}{e}}^1 (\sqrt{-\log x}) dx$$

- B. Soit la fonction F_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$F_0(x) = \int_0^x f_0(t) dt \quad \text{et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

1. Préciser le sens de variations de la fonction F_0 et montrer que pour $x \geq 0$, $F_0(x) \geq 0$

2. Montrer que $t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

$$\text{En déduire que } x \geq 0, F_0(x) \leq A_0 + \frac{1}{e}$$

3. Calculer $F_1(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x)$

4. Montrer que pour $n \geq 2$,

$$F_n(x) = -\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} + \frac{n-1}{2} F_{n-2}(x)$$

5. Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$x \geq 0, F_{2n+1}(x) = -\frac{n!}{2} e^{-x^2} \sum_{p=1}^n \frac{x^{2p}}{p!} + n! F_1(x)$$

6. En déduire la limite de F_{2n+1} en $+\infty$

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$ on a :

$$F_{2n+2}(x) = -\frac{(2n+1)!}{2^{n+1} n!} \frac{e^{-x^2}}{2} \left(\sum_{p=0}^n \frac{2^p p! x^{2p+1}}{(2p+1)! 2^{n-p}} \right) + \frac{(2n+1)!}{2^{n+1} n!} F_0(x)$$

8. En déduire que F_{2n+2} admet une limite L en $+\infty$ et que $0 \leq L \leq \frac{(2n+1)!}{2^{n+1} n!} (A_0 + e^{-1})$

PROBLEME 2 :

- A. Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x\sqrt{\log x}}$

1. Vérifier que pour $x > 1$:

$$\frac{e^{-x\sqrt{\log x}} - 1}{x-1} = \frac{e^{-x\sqrt{\log x}} - 1}{-x\sqrt{\log x}} \times \frac{-x\sqrt{\log x}}{x-1}$$

2. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

3. Dresser le tableau de variation de f

4. Montrer que f est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

5. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2} x$ admet dans $[1; +\infty[$ une solution unique $\alpha \in]1,19; 1,2[$

6. Construire C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

7. Soit A l'aire du domaine délimité par C_f et $C_{f^{-1}}$; l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \frac{\alpha}{2}$ et $x = \alpha$.

- a- Montrer que $A = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha + 1 + 2 \int_1^\alpha (f(x) - \frac{\alpha}{2}) dx$

- b- En utilisant les variations de la fonction f , montrer que $\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + 1 \leq A \leq 2\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - 1$

- B. Pour tout réel x on pose : $F(x) =$

$$\int_1^{e^{-x^2}} \log(f(t)) dt$$

1. Vérifier que F est paire.

2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $F(x)$ pour tout $x \geq 0$.

3. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $F(x) \leq -\frac{2}{3} x^3$

4. Dresser le tableau de variations de F puis construire la courbe C_F .

- C. Pour tout $x \geq 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n(x) = \int_1^x \frac{(\log(f(t)))^n}{t^{n+1}} dt$

1. Montrer que $I_n(x) = \frac{2(-1)^n}{n+2} e^{\left(\frac{n+2}{2}\right) \log(\log x)}$

2. Déterminer suivant les valeurs de x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x)$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n I_k(e) = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^k}{k+2} \text{ et}$$

$$U_n = S_{2n} \text{ et } V_n = S_{2n+1}$$

- a- Montrer que U est décroissante et que V est croissante.
b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \geq V_n$
c- En déduire que U et V convergent vers la même limite

4. On pose $J_n = \int_1^0 (-x)^{n+1} dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{et } J = \int_1^0 \frac{x^2}{1+x} dx$$

- a- Calculer J_n et J
b- Montrer que $\sum_{k=1}^n J_k = J + \int_1^0 \frac{(-x)^{n+2}}{1+x} dx$
c- Montrer que $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+3}$.

En déduire la limite de S_n

PROBLEME 3 :

A. On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}_+$ et $[1; +\infty[$ par :
 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ et $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

1. Etudier les variations de f et de g
2. On désigne par (ζ) et (ζ') les courbes représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
a- Etudier la position relative de (ζ) et (ζ') sur l'intervalle $[1; +\infty[$
b- Tracer les courbes (ζ) et (ζ')
3. Calculer l'aire du domaine plan délimité par les courbes (ζ) et (ζ') et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

B. f et g sont les fonctions définies précédemment

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle que l'on déterminera.
2. Montrer que g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
 $\frac{1}{2}(e^{f(x)} - e^{-f(x)}) = x$ et que pour tout $x \in [1; +\infty[$:
 $\frac{1}{2}(e^{g(x)} - e^{-g(x)}) = x$
4. Déterminer alors $f^{-1}(x)$ et $g^{-1}(x)$
5. On donne la fonction h définie sur $[0; +\infty[$

$$\text{par : } h(x) = \frac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)}$$

- a- Montrer que pour tout $x \geq 0$:
 $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et que $h'(x) < 1$
b- Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\log 5} h(t) dt$
6. Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$ on a : $h'(x) = \frac{1}{1 - h^2(x)}$
7. Montrer que h admet une réciproque notée h^{-1} et vérifier que $h^{-1}(0) = 0$
8. Montrer que h^{-1} est dérivable sur $[0; 1[$ et que pour tout $x \in [0; 1[$ on a : $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$
9. En remarquant que : $\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}$, calculer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0; 1[$

C. Soit n un entier naturel non nul, on définit sur $[0; +\infty[$ les fonctions F_n par : $F_0(x) = \int_0^x dt$ et pour $n \geq 1$: $F_n(x) = \int_0^x (h(t))^n dt$

1. Justifier l'existence des fonctions F_n
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; +\infty[$: $F_n(x) \leq x(h(x))^n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$

3. Montrer que pour tout $n \geq 2$:
 $F_n(x) - F_{n-2}(x) = -\frac{1}{n-1} (h(x))^{n-1}$

4. Montrer que pour $n \geq 1$:

$$F_{2n}(x) = x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} (h(x))^{2k-1} \text{ et que}$$

$$F_{2n+1}(x) = \int_0^x h(t) dt - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} (h(x))^{2k}$$

5. On définit sur $\mathbb{N}^*$ les suites (U_n) et (V_n) par : $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}}$ et $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k \times 3^{2k}}$

a- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \log \sqrt{2}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \log \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \right)$

b- En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k \times 2^k}$

PROBLEME 4 :

A. Soit φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = 1 - e^{-x}$

1. Etudier les variations de φ et tracer sa courbe (ε) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (2cm)
2. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle E que l'on déterminera.
3. Tracer la courbe (ε') de φ^{-1} dans le même repère.
4. Soit Δ la droite d'équation : $y = -x + 2$
a- Montrer que Δ coupe (ε) en un seul point A d'abscisse α et que $\alpha > 1$.

b- Soit D la domine du plan délimité par (ε) et (ε') et Δ . Calculer l'aire de D en fonction de α et vérifier que l'aire de D est égale à $(2 - \alpha^2)4cm^2$

B. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}} \text{ et soit } I = \int_0^1 f(x) dx$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a :
 $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$.

En déduire un encadrement de I .

C. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$

1. Calculer l'intégrale J_1
2. En utilisant deux intégrations par parties successives, montre que : $J_2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{5}{e^2} \right)$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = 1 + j_1 + j_2 + \dots + J_n$
a- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$1 + xe^{-x} + \dots + x^n e^{-nx} = \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}}$$

- b- En déduire que $I - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$
c- Montrer pour tout $x \geq 0$ on a : $0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$
d- En déduire un encadrement de $(I - u_n)$
e- En déduire alors la convergence de la suite (u_n)

D. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$
par : $\begin{cases} g(t) = f(\log t) \text{ si } t > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ et F la fonction
définie par : $F(x) = \int_1^x g(t)dt$

- Justifier l'existence de $F(x)$ sur $[0; +\infty[$
- Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer la dérivée $F'(x)$
- Montrer que pour tout $t > 0$ on a :
 $\log t - t + 1 < 0$. En déduire que : $\frac{t}{t - \log t} \leq t$
- Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$ on a : $\frac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0$
- Montrer que pour tout $t \in [1; +\infty[$ on a : $1 + \frac{\log t}{t} \leq \frac{t}{t - \log t} \leq 1 + \log t$
- Encadrer alors $F(x)$ pour $x \geq 1$ puis calculer sa limite en $+\infty$

PROBLEME 5 :

A. Soit f la fonction définies par : $f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$

- Déterminer le domaine de définition de f
- Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$
a- Dresser le tableau de variations de g
b- En déduire que la courbe de g coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α tel que :
 $\frac{\log 2}{2} < \alpha < 1$
- Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$
- Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
 $\log(f(x)) = \frac{1}{x}[1 + x \log] + \frac{1}{2} \log(1 - e^{-\frac{2}{x}})$
puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- Montrer que $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sqrt{\frac{1}{\alpha - \alpha^2}}$
- Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g\left(\frac{1}{x}\right)$
- Dresser le tableau de variations de f
- Etudier la position relative de (ζ_f) et de $\Delta: y = x$
- Tracer la courbe (ζ_f) et Δ dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

B. Soit h la restriction de f sur $\left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[$

- Montrer que h est une bijection de $\left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J .
- Tracer la courbe (ζ'_h) de h^{-1} dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
 $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\log 2}{2} \leq u_n \leq 4$
b- Etudier la monotonie de (u_n) . En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

C. Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit Ψ l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z tel que $z \in \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{\bar{z}}{\log|z|}$

- Déterminer les coordonnées X et Y du point M' en fonction des coordonnées x et y du point M
- On pose E l'ensemble des points $M' = \Psi(M)$ lorsque M décrit la droite d'équation $x = 1$ privée du point d'affixe 1.

Montrer que E est la réunion de la courbe (ζ_f) et d'une autre courbe ζ obtenue à partir de (ζ_f) par une transformation simple que l'on précisera.

PROBLEME 6 :

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \left(x + \frac{3}{2}\right)e^{-x} - \frac{1}{2}, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\log(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\log$ est la fonction logarithme népérien de base e . On désigne par (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de 2cm d'unité.

- Montrer que f est continue $\mathbb{R}$.
- Calculer la dérivée de f dans chacun des intervalles où la fonction f est dérivable.
- Montrer que pour tout réel positif t :
 $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$
- En déduire que pour tout réel positif x : $x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
- Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$
- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
 $h(x) = \frac{x}{1+x} - \log(1+x)$
a- Etudier les variations de h et en déduire le signe de la fonction $h(x)$.
b- Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe (C) et la tangente au point d'abscisse 0
c- Calculer en cm^2 , l'aire du domaine limité par (C) et les droites d'équation : $y = 0, x = -1$ et $x = 0$
- Pour tout réel positif x on pose :
 $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.
a- Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F'(x) = f(x+1) - f(x)$.
b- Donner le sens de variation de la fonction F .
c- Montrer que pour tout x positif, il existe un réel $c \in]x; x+1[$ tel que : $F(x) = f(c)$. En déduire alors la limite de la fonction de F en $+\infty$.
d- Etablir le tableau de variation de la fonction F

B. On désigne par g la restriction de f sur $[0; 1]$ et on note $I = \int_0^1 g(x)dx$

- Montrer que pour tout réel positif t et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
 $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$
- En déduire que pour tout réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$\log(1+x) = P_n(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \text{ avec}$$

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U_n = \int_0^1 g(x) dx \text{ et } V_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 g(x) dx$$

a- Vérifier que pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\log 2 \leq g(x) \leq 1.$$

$$\text{En déduire que : } \frac{\log 2}{n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$$

b- Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

4. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$:

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{1+n}$$

5. En déduire que pour tout x de $[0; 1]$:

$$\left| g(x) - \frac{P_n(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)x}$$

6. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$S_n = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}$$

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V_n + S_n \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{\log(n)}{n+1} \leq S_n(1) \leq V_n + S_n \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{\log(n)}{n+1}$$

b- Vérifier que pour tout x de $[0; 1]$ et pour tout

$$\text{entier } k \text{ de } \mathbb{N}^* : \frac{x^k}{k^2} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}$$

c- En déduire que pour tout réel x de $[0; 1]$ et pour

$$\text{tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* : 0 \leq S_n \leq x.$$

(On distinguera les cas n pair et n impair)

d- Déterminer alors les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \left(\frac{1}{n} \right) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1)$$

PROBLEME 7 :

On considère la fonction définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f_n(x) = x^n e^{-x}$. On appelle C_n sa courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 3 cm.

PARTIE A :

1. Etudier les variations de f_1 (on précisera la limite de la fonction f_1 en $+\infty$).

2. Tracer C_1 en précisant sa tangente à l'origine.

3. Pour $n \geq 2$, étudier les variations de f_n et déterminer sa limite en $+\infty$.

4. Tracer la courbe C_3 sur une nouvelle figure. On précisera sa tangente à l'origine.

5. On note S_n la réflexion par rapport à la droite $(D) : x = n$ et C'_n l'image de C_n par S_n .

a. Soit $M(x; y)$ un point du plan. On désigne par $M'(x'; y')$ l'image de M par S_n .

Calculer les coordonnées du point M' .

b. Montrer que C'_n est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$x \leq 2n \text{ et } y = f_n(2n - x)$$

c. Tracer C'_3 dans le même repère que C_3 .

d. Pour $x \leq 2n$, on pose $g_n(x) = f_n(2n - x)$.

En interprétant les intégrales suivantes, justifier

$$\text{l'égalité : } \int_n^{2n} f_n(t) dt = \int_0^n g_n(t) dt$$

6. Pour $x \in]0; n]$, on note :

$$h(x) = \ln(g_n(x)) - \ln(f_n(x))$$

a. Justifier que h_n est continue en $x_0 = 0$.

b. De l'étude des variations de $h_n(x)$, déduire le signe de la fonction $h_n(x)$.

c. Montrer que : $\forall x \in [0; n]$ on a : $f_n(x) \leq g_n(x)$.

d. Déduire de ce qui précède l'inégalité :

$$\int_0^n f_n(t) dt \leq \int_n^{2n} f_n(t) dt$$

PARTIE B :

Pour tout réel positif x , on pose :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

1. Démontrer que F_n est définie et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

2. A l'aide d'une intégration par parties calculer $F_1(x)$ puis démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } n \geq 1, \text{ on a :}$$

$$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$$

3. En déduire par un raisonnement par récurrence que pour tout x de $\mathbb{R}^+$ et pour tout $n \geq 1$, on a :

$$F_n(x) = n! \left[1 - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \right]$$

4. Démontrer alors que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = n!$

5. Démontrer que pour $x \geq 0$, on a : $F_n(n) \leq n!$

PARTIE C :

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t) dt \leq n!$

2. Déduire des résultats des parties A et B que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq F_n(n) \leq \frac{n!}{2} \text{ puis que}$$

$$\frac{1}{2} e^n \leq 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \leq e^n.$$

3. Déduire de la question 2c, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$

PROBLEME 8 :

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

PARTIE A :

1. Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 et interpréter le résultat.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Vérifier que pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, $f'(x) < 1$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ une unique solution α et que $0,7 < \alpha < 0,8$

4. Tracer la courbe C_f .

5. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un ensemble J que l'on précisera.

6. Démontrer que l'équation $g(x) = x$ admet sur J une solution unique α . Tracer la courbe C_g .

7. Expliciter $g(x)$ pour tout x de J .

PARTIE B :

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $\forall x \in$

$$J, F_n(x) = \int_0^{g(x)} [f(t)]^n dt, \text{ et } I_n = F_n(\alpha)$$

1. Montrer que pour tout $x \in J$, $F_2(x) = g(x) - x^2$. Exprimer I_2 en fonction de α .

- Montrer que F_n est dérivable sur α et que pour tout x appartenant à J , $F'_n(x) = \frac{2x^{n+1}}{1-x^2}$
- Déterminer a , b et c tels que pour tout x distincts de 1 et -1 on ait : $\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$
- Pour $x \in J$, expliciter $F_1(x)$.
Expliciter alors I_1 en fonction de α .
- Déterminer en fonction de α l'aire du domaine délimité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

PARTIE C :

- Montrer que $F_{n+2}(x) - F_n(x) = -\frac{2}{n+2}x^{n+2}$
- En déduire que $I_{n+2} - I_n = -\frac{2}{n+2}\alpha^{n+2}$
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n} = \alpha - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^{2k}}{k}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n+1} = \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^{2k}}{k}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$

PROBLEME 9 :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm. n étant un entier naturel non nul, on s'intéresse aux solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation d'inconnue x :

$$(E_n) : x + e^x - n = 0$$

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_n(x) = x + e^x - n$. On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère.

PARTIE A :

- Vérifier que pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln x - x < 0$
- Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution u_n et que u_n appartient à $\left[\ln \frac{n}{2}; \ln n\right]$
- En déduire les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln n}$
- Calculer u_1
- Dans cette question et celles qui suivent, on pourra se servir si besoin est de l'équivalence suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, x + e^x - n = 0 \Leftrightarrow e^x = n - x$
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}}$. Montrer alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$
 - A l'aide des variations de l'application f_n , étudier celle de la suite (u_n) .
 - On note A_n l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = u_{n+1}$, $x = u_n$, l'axe des abscisses et la courbe C_{f_n} . Montrer que : $A_n = \frac{1}{2}(u_{n+1}^2 - u_n^2) - (n+1)(u_{n+1} - u_n) + 1$
Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle fermé d'extrémités u_{n+1} et u_n on a : $0 \leq f_n(x) \leq 1$
En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

- En utilisant la définition d'une fonction en un point, vérifier qu'il existe une fonction ε définie dans un intervalle ouvert contenant 0 telle que pour tout h dans cet intervalle, on ait : $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

- On pose $\alpha_n = \frac{u_n}{\ln(n)} - 1$ c'est-à-dire :

$$u_n = \ln(n) + \alpha_n \ln(n).$$

Quelle est la limite de (α_n) ?

- Déterminer une suite (y_n) telle que :

$$u_n = \ln(n) + \ln(1+y_n)$$

Déduire alors des questions précédentes qu'il

existe une suite β_n ayant pour limite 0 telle que :

$$u_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + \beta_n \frac{\ln n}{n}$$

PARTIE B :

Dans cette partie, on s'intéresse à u_2 .

D'après la partie A, u_2 appartient à $[0; \ln 2]$.

On note g l'application de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [0, 1], g(x) = \ln(2-x) \text{ et on pose}$$

$$b = \frac{2}{3} \ln 2 \text{ et } a = g(b)$$

- Montrer que u_2 est le seul point fixe de g et que u_2 appartient à l'intervalle $[a, b]$
- Prouver que g est dérivable sur I et que : $\forall x \in I, |g'(x)| \leq |g'(b)|$
Enoncer clairement le théorème qui permet d'en déduire que : $\forall x, y \in I, |g(x) - g(y)| \leq |g'(b)||x - y|$
- Vérifier que $g(I) \subset I$
- On pose $a_0 = b$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = g(a_n)$
 - Démontrer que la suite (a_n) est bien définie (c'est-à-dire démontrer que pour tout entier naturel n , a_n à l'ensemble de définition de g) et que pour tout entier naturel n , $a_n \in I$.
 - Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|a_n - u_2| \leq |g'(b)|^n |b - a|$
 - En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.
 - Quelle valeur suffit-il de donner à n pour que a_n soit une valeur approchée de u_2 à 10^{-3} près.
- Représenter sur un même graphique les restrictions de g et f_2 à l'intervalle $[0; 1]$, le domaine A_2 , la droite d'équation $y = x$ les points de coordonnées respectives : $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(u_2, 0)$, $(u_3, 0)$