TS1 : LES COURBE PARAMETREES :

EXERCICE 1 :

A. Soit $(O, \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé.
 Un point A sur l'axe des abscisses et un point B sur l'axe des ordonnées sont tels que $AB = 1$.
 On note M le projeté orthogonal de O sur $[AB]$.
 On se propose de déterminer le lieu géométrique (C) du point M lorsque A et B se déplacent, chacun sur son axe.

- On note $(x; y)$ les coordonnées de M et t une mesure de l'angle $(\vec{AB}, -\vec{i})$.
 Montrer que (C) est l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $\begin{cases} x = f(t) = \sin^2 t \cdot \cos t \\ y = g(t) = \cos^2 t \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
- Pour tout réel t, comparer la position des points $M(t)$ à $M(t + 2\pi)$, $M(t)$ à $M(-t)$, puis $M(t)$ à $M(t)$ et $M(t)$ à $M(\frac{\pi}{2} - t)$
- En déduire qu'il suffit de faire l'étude pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et de construire la partie de courbe (C) correspondante.
 Indiquer les transformations qui permettent de compléter la courbe.
- Etudier les variations f et g sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
- Tracer la courbe (C) en précisant les points où la tangente est parallèle à l'un des axes, ainsi que les tangentes à l'origine.

B. Soit (C) la courbe définie par : $\begin{cases} x(t) = \sin 3t \\ y(t) = \cos t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$
 On appelle $M(t)$ le point de coordonnées $(\sin 3t; \cos t)$

- Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}, M(t + 2\pi) = M(t)$
- Préciser la position de $M(t + \pi)$ et de $M(\pi - t)$ par rapport au point $M(t)$.
- Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$
- Dresser le tableau de variations
- Donner les vecteurs directeurs des tangentes aux points $M(0), M(\frac{\pi}{6}), M(\frac{\pi}{3})$ et $M(\frac{\pi}{2})$
- Construire la courbe (C).

EXERCICE 2 :

A. Soit (C) la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = \tan t + 2\sin t \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

- Comparer les points $M(-t)$ et $M(t)$.
 Qu'en déduisez-vous pour la (C)
- Etudier les variations de x et y et tracer la courbe
- Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au point $M(\frac{\pi}{4})$

B. Soit C la courbe définie par : $\begin{cases} x = 3 - 2\cos^2 t \\ y = \sin 3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

- Que peut-on dire des points $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$ ainsi que les points : $M(\frac{\pi}{2} + t)$ et $M(\frac{\pi}{2} - t)$?
- Préciser les positions des points $M(t)$ et $M(-t)$
- Etudier les variations de x et y pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$
- Donner les vecteurs dérivés des points particuliers de la courbe pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$
- Tracer la courbe C

C. Soit (Γ) l'indicatrice de la courbe définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + \sqrt{3}\sin t \\ y(t) = \sin 2t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On appelle $M(t)$ le point de (Γ) définie par la valeur de t

- Montrer que pour tout : $t \in \mathbb{R}, M(t + 2\pi) = M(t)$
- Comparer les positions des points $M(t + \pi)$ et $M(t)$ ainsi que les positions des points $M(t + \frac{\pi}{3})$ et $M(\frac{\pi}{3} - t)$ de cette courbe.
- Etudier les variations des fonctions x et y pour tout $t \in [\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}]$
- Dresser leur tableau de variation
- Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes en $M(\frac{\pi}{3}), M(\frac{\pi}{2}), M(\frac{2\pi}{3}), M(\frac{5\pi}{6})$ pour tout $t \in [\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}]$
- Construire la courbe (Γ) .

EXERCICE 3 :

A. Soit (Ψ) la courbe définie par le système

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- Préciser pour $t \neq 0$, la position des points $M(-t)$ et $M(\frac{1}{t})$ par rapport à $M(t)$.
- Etudier les variations de x et y dans $[0; 1]$
- Donner une équation de chacune des tangentes à (Ψ) aux points $M(0)$ et $M(1)$
- Tracer la courbe (Ψ) .

B. Soit $(\mathfrak{S})$ la courbe de représentation

$$\text{paramétrique suivante : } \begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- Etudier les variations de x et y pour $t \in [0; \pi]$
- construisez la partie correspondante, notée C de la courbe $(\mathfrak{S})$
- Quelle transformation passe-t-on de $M(t)$ à $M(t + \pi)$ et à $M(t - \pi)$
- Déduisez-en la partie de la courbe de $(\mathfrak{S}')$ constituée des points $M(t)$ pour $t \in [-2\pi; 2\pi]$.
- Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ de la tangente à $(\mathfrak{S})$ au point $M(t)$.

LYCEE COLUMBA NDOHIEHNE DIOUF 19 - 20

6. Déduisez en que l'angle $(\vec{OM}(t); \vec{u}(t))$ est indépendant du point $M(t)$.
- C. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit C la courbe définie par : $\begin{cases} x(t) = 2e^t + e^{-t} \\ y(t) = 2e^t - e^{-t} \end{cases}$
- Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $M(a; b)$ un point de C
 - Donner en fonction de a et b les coordonnées du vecteur dérivé $\vec{u}$ en M .
 - Soit $N(b; a)$ et T le point tel que : $\vec{OT} = \vec{OM} + \vec{ON}$
Montrer que (MT) est tangente à C en M .
 - Montrer que C est contenue dans l'hyperbole $(H): x^2 - y^2 = 8$.
 - Tracer (H) en précisant ces éléments caractéristiques.

EXERCICE 4 :

- A. On considère a courbe paramétrée C définie par :
- $$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{t^2-2t} \\ y(t) = \frac{t^2-3}{t} \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$
- Pour quelles de t le point $M(t)$ est il défini ?
 - Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ puis dresser le tableau de variation.
 - Etude les branches infinies de C :
 - Etudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ en $-\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote à C
 - Etudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ en $+\infty$, et en 2. Que peut on en conclure ?
 - Etudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ en 0. Montrer que $\frac{y(t)}{x(t)}$ a une limite finie a en 0^+ et que $y(t) - ax(t)$ à une limite finie, b , en 0^+ . En déduire que la droite $(\Delta): y = ax + b$ est une asymptote oblique à C .
 - Etudier de même la branche infinie de C en 0^-
 - Démontrer qu'il existe deux valeurs t_1 et t_2 , du paramètre t telles que $M(t_1) = M(t_2)$. Calculer t_1 et t_2 et déterminer les tangentes à C au point $M(t_1)$ et au point $M(t_2)$.
 - Tracer la courbe C en utilisant les indications précédentes. On dessinera les points $M(t)$ ainsi que les tangentes en ces points pour les valeurs $-3, -2, -1, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3, 4, 5$ de t
On orientera les branches infinies de C dans le sens des valeurs croissantes de t .
- B. Dans un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 9 cm, on considère le point G_t de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ définies par :
- $$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}(\cos 2t + 2\cos t) \\ y(t) = \frac{1}{3}\sin 2t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$
- Pour tout t réel, comparer les points $G_{t+2\pi}$ et G_t puis G_{-t} et G_t .
 - Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sur l'intervalle $I = [0; \pi]$
 - Tracer la courbe $\mathbb{I}$, l'ensemble des points G_t .
En précisera les points de contact des tangentes

parallèles à l'un des axes

EXERCICE 5 :

- A. Soit la courbe (C) définie par le système d'équations paramétriques :
 $\begin{cases} x(t) = t \cos t - \sin t \\ y(t) = t \sin t + \cos t \end{cases}$ où $t \in [-2\pi; 2\pi]$
- En étudiant la parité des fonctions x et y , préciser un axe de symétrie de (C) et en déduire l'intervalle d'étude $I = [0; 2\pi]$
 - Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sur l'intervalle I
 - Tracer la courbe (C)
- B. Soit la courbe (C) de système d'équations paramétriques :
 $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos t}, t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[\\ y(t) = \sin t \end{cases}$
- Examiner la position relative de $M(\pi - t)$ et $M(t)$. En déduire un axe de symétrie de (C)
 - Etudier la parité des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ et en déduire un élément de symétrie de (C) .
 - Etudier les variations des fonctions de $x(t)$ et $y(t)$ sur l'intervalle d'étude.
 - Tracer la courbe (C) dans le repère précédent.
- C. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct, soit (C) la courbe paramétrée de représentation paramétrique :
 $\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t)\cos t \\ y(t) = (1 + \cos t)\sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
- En utilisant la parité et la périodicité des fonctions $x(t)$ et $y(t)$, retrouver l'intervalle d'étude et déterminer les symétriques de la courbe.
 - Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
 - Montrer que si $t \neq \pi$ la droite $\vec{OM}_t$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$
 - En déduire la tangente au point $M(\pi)$ de la courbe puis tracer (C) .

EXERCICE 5 :

- Le plan (P) est rapporté a un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
On prend 4 cm comme unité sur les deux axes.
On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m , d'affixe z , associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$
L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (G) décrite par M lorsque m décrit le cercle (C) de centre O et de rayon 1.
Soit t un réel de $I = [-\pi; \pi]$ et m le point de (C) d'affixe $z = e^{it}$.
- Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées:
 $x(t) = \frac{\cos 2t}{2} - \cos t$ et $y(t) = \frac{\sin 2t}{2} - \sin t, t \in I$
Ces relations constituent une représentation paramétrique de (G) .
 - Comparer $x(t)$ et $x(-t)$ d'une part, $y(t)$ et $y(-t)$ d'autre part.

3. En déduire que (G) admet un axe de symétrie que l'on précisera.
4. Montrer que $x'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$
5. Etudier les variations de x sur $J = [0; \pi]$.
6. Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$.
7. Etudier les variations de y sur J.
8. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et de y sur J.
9. Placer les points de (G) correspondant aux valeurs $0, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$, et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (G) est horizontale).
10. Tracer la partie de (G) obtenue lorsque t décrit J puis tracer (G) complètement

EXERCICE 6 :

PARTIE A :

1. On considère l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{e^x \cos x}{2 + \sin x} \quad (E).$$
f étant une fonction numérique dérivable sur IR, on pose la fonction $g(x) = e^x f(x)$.
 - a- Montrer que *f* est solution de (E) si et seulement si : $g'(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ la dérivée de *g*.
 - b- Déterminer la solution générale de (E), en déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe (Γ) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \ln(2 + \sin t) \\ y(t) = \ln(2 + \cos t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$
 - a- Comparer $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ ainsi que les points $M(t)$ et $M\left(-t + \frac{\pi}{2}\right)$
 - b- En déduire que la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve (Γ) et montrer que construire (Γ), il suffit d'étudier x et y dans $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} + \pi\right]$
 - c- Dresser le tableau de variations des fonctions x et y dans $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ et tracer (Γ).

PARTIE B :

1. Soit *f* la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par :

$$f(t) = e^{-t} \cos t.$$
 Etudier les variations de *f* et construire sa courbe représentative dans un repère orthogonal (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).
2. Soit *g* le prolongement à $\mathbb{R}$ de *f*.
 - a- Comparer $g(t)$ et $g(t + 2\pi)$. Donner alors le sens de variations de *g*.
 - b- On pose $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$. On note (C_u) et (C_v) leurs courbes représentatives et (Γ) celle de *g* dans le même repère. Quels sont les points communs à (Γ) et (C_u) d'une part, à (Γ) et (C_v) d'autre part ?
 - c- Montrer qu'en chacun de ces points communs les deux courbes ont la même tangente.

- d- Démontrer que *g* admet une limite en $+\infty$. (On fait remarquer que : $-1 \leq \cos t \leq 1$).
3. Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la courbe paramétrée (Λ) définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \cos t \\ y(t) = e^{-t} \sin t \end{cases} \quad \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right).$$
 - a- Etudier les variations des fonctions x et y et dresser le tableau des variations conjointes.
 - b- Soit M_t le point de (Λ) de paramètre t et $\vec{V}_t$ le vecteur dérivé lui correspondant. Calculer la norme du vecteur $\vec{OM}_t$ et montrer que l'angle $(\vec{OM}_t, \vec{V}_t)$ est constant.
 - c- Représenter graphiquement (Λ). Préciser les tangentes aux points de paramètres $-\frac{\pi}{2}$ et 0.

PROBLEME 1 :

LA CISOÏDE DE DIOCLÉS :

Soit une droite Δ en H à un cercle ce (C) de centre I et soit O le point diamétralement opposé à H. On trace une droite variable passant par O qui coupe C en A et la droite Δ en A'. On définit alors le point M par $\vec{OM} = \vec{AA'}$. Lorsque la droite pivote autour de O, le point M décrit une courbe appelée : **Cisoïde** droite (ou **Cisoïde** de **Dioclés**).

1. Effectuer un tracer point par point de la cisoïde.
2. Montrer que la **Cisoïde** passe par O. En quelle autre point la **Cisoïde** droite coupe t – elle le cercle C ?
3. Quelle symétrie, la **Cisoïde** droite, définie présente t – elle ?
4. On définit un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ comme indiqué sur la figure. On choisit comme paramètre t, le coefficient directeur de la droite D_t , qui pivote autour de O.
 - a- Quelles sont les coordonnées de H et A' ?
 - b- Donner une équation cartésienne du cercle C.
 - c- On note x_A et y_A , les coordonnées du point A. Traduire par une équation le fait que A appartient à D_t et le fait que A appartienne à C. En déduire les coordonnées du point A en fonction de t. Donner alors une représentation paramétrique de la **Cisoïde**.
5. En remarquant $y = tx$, trouver une relation entre t et y indépendante de t.
6. On se propose de construire à la règle et l'équerre, le point M de la **Cisoïde** définie à partir d'une droite D_t donnée. On appelle B le point tel que OHA'B soit un rectangle. Soit Ω son centre.
 - a- Par la symétrie de centre Ω , quelle est l'image de A' ? de A ? de H ? en déduire que $(BM) \perp (OM)$
 - b- Donner une construction du point M, sans tracer le cercle C.
7. Calculer les coordonnées du vecteur dérivée en M. Calculer les coordonnées du point M', intersection de cette tangente et de la droite Δ

Donner une construction de la tangente à la Cisoïde en M.

PROBLEME 2 :

LA CYCLOÏDE

Une roue de vélo roule sans glisser sur un sol horizontal. On s'intéresse à la trajectoire décrite par la valve M de la roue, dans un repère lié à un observateur extérieur fixe. Un cercle de rayon r roule sans glisser sur l'axe $(O, \vec{j})$.

On adopte les notations de la figure ci sous.

θ est une mesure de l'angle $(\vec{\Omega M}; \vec{\Omega I})$.

A $t = 0$, le point M se trouve en O

1. Si $\theta \in [0; 2\pi]$, expliquer pourquoi, la condition de roulement sans glissement s'écrit $OI = r\theta$. On admet pour un nombre réel θ quelconque on a l'égalité $\vec{OI} = r\theta\vec{i}$.

2. Calculer une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{\Omega M})$ en appliquant la relation de Chasles.

En déduire les coordonnées de $\vec{\Omega M}$

Calculer les coordonnées du point M dans le repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en écrivant :

$$\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{IM} + \vec{OM}$$

Démontrer qu'un système d'équations

paramétriques de la courbe décrite par le point M,

appelée cycloïde, est $\begin{cases} x(\theta) = r\theta - r\sin\theta \\ y(\theta) = r - r\cos\theta \end{cases}$

3. Calculer les coordonnées du vecteur dérivé

$\vec{v}(x'(\theta); y'(\theta))$. Existe-t-il des points tels que $\vec{v}$

soit nul ? calculer $\vec{v} \cdot \vec{MI}$. Que peut-on en déduire sur la tangente en M, quand $\vec{v} \neq \vec{0}$

4. Tracer point par point la cycloïde pour le cercle de rayon 1.

5. Tracer les tangentes lorsque $\theta = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi; 0 \right\}$

PROBLEME 3 :

LES HYPOCYCLOÏDES

La roue de vélo roule, sans glisser intérieurement à un cercle. On s'intéresse au mouvement décrit par la valve dans un repère lié à un observateur extérieur fixe. On adopte les notations de la figure ci-dessous.

θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{OM}_0; \vec{OI})$. θ'

est une mesure de l'angle $(\vec{\Omega I}; \vec{\Omega M})$

A $t = 0$, le point M se trouve au point M_0 .

1. Traduire la condition de ce mouvement de roulement sans glissement.

2. Calculer une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{\Omega M})$ en fonction de θ

En déduire les coordonnées de M dans le repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3. Démontrer qu'un système d'équations paramétriques de la courbe décrite par M appelée hypocycloïde, est :

$$\begin{cases} x(\theta) = (R - r)\cos\theta + r\cos\left(1 - \frac{R}{r}\right)\theta \\ y(\theta) = (R - r)\sin\theta + r\sin\left(1 - \frac{R}{r}\right)\theta \end{cases}$$

4. Calculer les coordonnées du vecteur dérivé noté $\vec{v}(x'(\theta); y'(\theta))$
5. Calculer $\vec{v} \cdot \vec{MI}$. En déduire que, quand $\vec{v} \neq \vec{0}$, la tangente en un point M passe par le point J diamétralement opposé au point au point I sur le cercle mobile.
6. Lorsque $R = 4r$, l'hypocycloïde prend le nom d'**Astroïde**. Donner un système d'équations paramétriques d'une **Astroïde**. N'exprimer $x(\theta)$ et $y(\theta)$ qu'en fonction de puissance de $\sin x$ et $\cos x$
7. Lorsque $R = 3r$, l'hypocycloïde prend le nom de **Deltoïde**. Donner un système d'équations paramétriques d'une **Deltoïde**.

PROBLEME 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra 4 cm pour unité.

1. Soit n un entier naturel. On considère l'application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :
$$f_n(x) = \begin{cases} nx + |x|\ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n , C_n^+ la partie de C_n dont les abscisses des points sont positives et C_n^- la partie de C_n dont les points ont des abscisses négatives.

1. Donner l'expression de $f_n(x)$ pour $x < 0$ puis l'expression de $f_n(x)$ pour $x > 0$
2. Démontrer que f_n est continue en 0. La fonction f_n est-elle dérivable en 0 ?
3. Etudier les variations de f_n .
4. Soit A_n le point de C_n^+ où la tangente est parallèle à l'axe (xx') .
 - a- Déterminer les coordonnées de A_n .
 - b- Démontrer que les points A_n , lorsque n décrit $\mathbb{N}$, appartiennent à une droite (D) dont on précisera.
5. Soit B_n le point d'intersection de C_n^+ autre que O avec l'axe (xx') .

Démontrer que la tangente à C_n en B_n a une direction indépendante de n .

1. Un point M a pour coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:
$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = 2(1+t)e^t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la trajectoire du point M et son sens de parcours. Construire cette courbe.
2. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ du point M à l'instant t .
3. Donner le sens de variation de la fonction h qui à t associe $\|\vec{V}(t)\|^2$.