TS1: LES SIMILITUDES PLANES

EXERCICE 1 :

A. On donne un triangle ABC tel que $AB = 6$, $BC = 4$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit I le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Soit h l'homothétie de centre I qui transforme C en B. Construire (d) de la droite (AC) par h.
2. Déduire l'image de D par h.
3. Soit S la similitude qui transforme A en B et C en A.
   - a- Déterminer le rapport et un angle de S.
   - b- Déterminer l'image de chacune des droites (AI) et (CB). En déduire que I est le centre de S.
   - c- Déterminer l'image de (AB) par S.
   - d- En déduire que $S(B) = D$.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de SoS.
5. Montrer que $SoS(A) = h(A)$ puis que $SoS = h$
6. Soit le point E milieu de $[AC]$.
   - a- Déterminer les points F et G tels que : $F = S(E)$ et $G = S(F)$
   - b- Montrer que les points E, I et G sont alignés.

B. Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. Sur la figure on prendra $8cm$ comme longueur du segment $[AB]$

1. Etudier et construire l'ensemble ε des points M du plan tel que $\frac{MA}{MB} = 3$.
2. Etudier et construire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$
3. Soit C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et D l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.
   On désigne par S la similitude directe qui transforme A en B et C en D.
   - a- Déterminer le rapport et l'angle de S.
   - b- On note I le centre de la similitude S. Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$
   - c- En déduire la position de I et le placer sur la figure précédente.
   - d- Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD.

EXERCICE 2 :

A. Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On note D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$

1. Montrer que $r_C o r_B o r_A$ est la symétrie de centre E. Préciser la position du point E.
2. On admet qu'il existe une seule similitude plane directe S de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B. Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$. En déduire que $S(E) = D$.
3. Soit Ω le centre de la similitude S.
   - a- Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE
   - b- Construire le point Ω.
4. Démontrer que S transforme la droite (AC) en la droite (CB).
5. Démontrer que l'image par S du cercle circonstrit au triangle ACE est le cercle de diamètre $[BD]$.
6. En déduire que l'image de C par la similitude est le point I, milieu du segment $[DE]$

B. ABC est un triangle rectangle en B tels que : $AB = 3$, $BC = 2$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

1. Montrer qu'il existe une unique similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(B) = C$
2. Donner la nature , le rapport et l'angle de f
3. Soit H le centre de f.
   - a- Montrer que H, A et C sont alignés et que (AC) est perpendiculaires à (BH).
   - b- Soit D l'image de C par f. Montrer que D, B et H sont alignés puis construire le point D.
4. Soit g la similitude plane indirecte telle que $g(A) = B$ et $g(B) = C$.
   - a- Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation fog^{-1}
   - b- Soit E l'image de C par g. Déterminer l'image de E par fog^{-1} puis construire E.
   - c- Soit Ω le centre de g. Déterminer $gog(A)$ et $gog(B)$ puis déduire la construire de Ω.
   - d- Construire l'axe de la similitude g.

EXERCICE 3 :

A. Soit P un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1. Soit f l'application de P vers lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = i\sqrt{2}\bar{z} + 3$

a- Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera l'affixe de son centre Ω.

b- Déterminer une équation cartésienne de son axe

2. Soit g l'application de P vers lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -i\bar{z} + 3$

a- Montrer que g est un antidéplacement

b- Soit M'' d'affixe z'' l'image de M par gog, exprimer z'' en fonction de z.

c- En déduire que g est une symétrie glissante et préciser l'affixe de son vecteur

3. Soit h l'application de P vers lui-même qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le points M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telles que : $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$

a- Exprimer z' en fonction de z

b- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

4. Donner les formes complexes de hof et gof

5. Donner la nature et les éléments caractéristiques de chacune de ces transformations.

6. Soit $A\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$. Déterminer $hog(A)$

B. Soit ABC un triangle équilatéral direct et on pose $I = B * C$.

1. Soit S la similitude directe qui transforme I en B et C en A.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- On désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que le centre Ω de S appartient à ζ et à la droite (AI). Construire Ω.

2. Soit φ la similitude indirecte qui transforme I en B et C en A.

a- Déterminer et construire le point $B' = \varphi(B)$

b- On désigne par D la droite perpendiculaire à la droite (AB) en B.

Montrer que le point $A' = \varphi(A)$ est le point d'intersection des droites (AC) et D.

c- Déterminer le rapport de la similitude φ.

3. On désigne par Ω le centre de φ et par Δ son axe.

a- Déterminer $(\varphi o \varphi)(I)$ et $(\varphi o \varphi)(C)$

b- Déduire alors une construction du point Ω.

c- Montrer que $(\Delta)\perp(AC)$

d- Déterminer et construire alors la droite (Δ)

<u>EXERCICE 4 :</u>

A. Soit OAB un triangle tel que : $OA = 2OB$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit J et K les milieux respectifs des segments $[OA]$ et $[OB]$. On désigne par A' le symétrique de O par rapport à B, I le symétrique de J par rapport à O et H le projeté orthogonal de Osur la droite (AB)

1. Montrer qu'il existe un unique déplacement R du plan tel que $R(A) = A'$ et $R(B) = I$

2. Montrer que R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

3. On pose l'application $G = R(H)$

a- Montrer que G appartient à la droite (IA') et que les droites (OG) et (IA') sont perpendiculaires.

b- Construire le point G.

4. Soit S la similitude directe qui transforme O en A et B en O.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Montrer que H et le centre de S.

c- Montrer que $S(K) = J$, en déduire que les droites (HK) et (HJ) sont perpendiculaires.

5. La perpendiculaire en A à la droite (OA) coupe la droite (HK) en C.

a- Montrer que $S(OA) = (AC)$

b- Déduire que : $S(J) = C$

c- Montrer que : $HC = OA = AC$

6. Soit $h = SoR^{-1}$, on désigne par L le symétrique de O par rapport à I.

a- Déterminer $h(I)$ et $h(O)$.

b- Montrer que h est une homothétie et préciser son rapport.

c- Déterminer le centre de l'homothétie h.

B. Soit ABC un triangle équilatéral de centre O. On désigne par A' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AB]$ et par I le symétrique de C par rapport à O et par J le symétrique de B par rapport à O.

1. Soit f la similitude directe qui transforme A en A' et C en B. R est la rotation de centre O et qui transforme A en C. h est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$

a- Déterminer le rapport et l'angle de f

b- Déterminer l'angle de la rotation R.

c- Montrer qu'on a : $f = hoR$

d- Déterminer alors $f(B)$ et $f(I)$.

2. Soit g la similitude indirecte qui transforme I en O et C en B. On désigne par Ω son centre.

a- Déterminer le rapport de la similitude g.

b- Déterminer $(gof^{-1})(O)$ et $(gof^{-1})(B)$

c- Caractériser alors l'application gof^{-1}

d- En déduire alors que $g(B) = A'$

3. Déterminer $(gog)(C)$.

4. Déterminer puis construire Ω.

5. Montrer que l'axe de g est la droite perpendiculaire à (BC) en Ω.

EXERCICE 5 :

I. Soi et par t m un nombre complexe.

1. On pose $P(m) = -4m^2 - 4m(1-4i) + 15 + 8i$. Montrer que $P(m) = (2im + i + 4)^2$
2. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : (E) : $z^2 - (2m+5i)z + 2m^2 + (1+i)m - 2(5+i) = 0$ où m est un paramètre appartenant à l'ensemble $\mathbb{C}$.

a- Déterminer les deux solutions de l'équation (E)

b- Calculer m pour que m soit lui-même solution de l'équation (E)

II. Dans la suite on considère dans le plan P muni d'un repère orthonormé complexe $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit le point M du plan d'affixe un complexe m. On désigne par S la imilitue directe qui au point M, associe le point Q d'affixe $z = (1+i)m + 2 + 3i$ et par S' la similitude directe , qui au point M, associe le point Q' d'affixe $z' = (1-i)m - 2 + 2i$

1. Donner les caractéristiques des deux similitudes S et S'
2. Montrer que $S' o S$ est une homothétie dont on précisera le centre J et le rapport.
3. Montrer que l'application f qui envoie Q en Q' est une rotation, dont on précisera le centre Ω et son angle
4. Soit I le milieu de $[QQ']$. On pose $I = t(M)$

a- Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur.

b- Montrer que si $Q \neq \Omega$ alors (ΩI) et (QQ') sont perpendiculaires.

5. On donne un point M du plan.

a- Déduire de ce qui précède une méthode pour construire plus simplement les points Q et Q' tels que $S(M) = Q$ et $S'(M) = Q'$

b- On donne un point Q du plan. Construire les points M et Q' tels que : $S(M) = Q$ et $S'(M) = Q'$

6. Soit M un point du plan et $Q = S(M), Q' = S'(M)$

a- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que M, Q et Q' soient alignés.

b- En déduire, dans le cas précédent, l'ensemble des points Q et celui des points Q'.

c- Construire ces deux ensembles.

EXERCICE 6 :

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

A. *On prend pour point M_0 l'origine O du repère , soit alors M_1 le point du plan P tel que $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{\imath}$ On fixe un nombre réel $r > 0$, et un nombre réel θ dans $\mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.*

Soit M_2 le point du plan P tel que :

$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r\|\overrightarrow{M_0M_1}\|$ *et* $(\overrightarrow{M_0M_1}; \overrightarrow{M_1M_2}) = \theta$

1. *Calculer l'affixe v_0 du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ et l'affixe v_1 du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$*
2. *Les points M_0, M_1, M_2 ayant été défini ci – dessus, pour tout $n \geq 1$ dans $\mathbb{N}$, définit le point M_{n+1} à partir des points M_{n-1} et M_n par :*

$\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\| = r\|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\|$ *et* $(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}; \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) = \theta$

On obtient une suite de points $M_0, M_1, M_3, \ldots, M_n \ldots$, et la figure obtenue en traçant les segments $[M_0M_1], [M_1M_2], , [M_nM_{n+1}] \ldots$, est un « Jolygone ».

On note v_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$

a- *Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n = re^{i\theta}v_{n-1}$*

b- *En déduire pour tout $n \geq 0$, l'expression de v_n en fonction de n, r et θ.*

c- *Dans cette question, on suppose que $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. Calculer v_n pour $0 \leq n \leq 3$ puis placer les points M_0, M_1, M_3 et M_4.*

B. *Dans la suite on suppose $0 < r < 1$ et, pour tout entier naturel $n \geq 0$, on note z_n l'affixe de point M_n*

1. *Calculer les complexes z_0, z_1 et z_2.*
2. *Pour tout $n \geq 0$, exprimer v_n en fonction de z_n et z_{n+1}. Déduisez – en que pour tout $n \geq 1$, $z_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$*
3. *Montrer que pour tout $z \neq 1$, :*

$1 + z + z^2 + \;;.+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$

Calculer, pour tout $n \geq 0$, z_n en fonction de n, r et θ

4. Démontrer que le module de $z_n - \frac{1}{1-re^{i\theta}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
5. On note Ω le pont du plan P d'affixe $\omega = \frac{1}{1-re^{i\theta}}$
6. Interpréter géométriquement le résultat de 4)
7. Pour $n \geq 0$, on note z'_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$

a- Calculer z'_n en fonction de n, r et θ

b- Etablir qu'il existe un complexe $a \neq 0$ tel que pour tout $n \neq 1$, $z'_n = az_{n-1}$

c- En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminer une similitude directe f telle que pour tout $n \geq 1$, $f(M_{n-1}) = M_n$ Préciser le centre, le rapport et l'angle de f.

d- Dans cette question, on suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $= \frac{\pi}{4}$.
calculer dans ce cas les coordonnées de Ω et placer ce point de Ω sur la figure.