TS1 : COMPLEXES ET GEOMETRIE

EXERCICE 1 :

Soit n un entier naturel non nul et q un nombre réel différent de $0, -1$ et 1 .

On considère dans le plan complexe les n points $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$, d'affixes respectives les complexes $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$

1. Démontrer que le système de points pondérés $\{(A_k, q^k), 0 \leq k \leq n-1\}$ admet un barycentre que l'on notera G_n

2. On choisit les nombres complexes z_k de la façon suivantes :

$$\begin{cases} z_0 = 1, & z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ z_k = (z_1)^k, & \text{pour } 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

a- Déterminer l'affixe z_n de G_n en fonction de q et z_1

b- Préciser la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n du complexe z_n .

3. Déterminer n pour que z_n soit un nombre réel. Calculer les limites de x_n et de y_n lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B et C , deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c , et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O , a pour orthocentre le point H d'affixe $a + b + c$

1. Etude d'un cas particulier : On pose :

$$a = 3 + i, \quad b = -1 + 3i, \quad c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$$

a- Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

b- Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a + b + c$, puis vérifier que le point H est l'orthocentre du triangle ABC .

2. Etude du cas général

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b et c sont les affixes respectives des points A, B, C

a- Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :

$$a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$$

b- On pose $w = \bar{b}c - b\bar{c}$. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans la question 1, démontrer que le complexe w est imaginaire pur.

c- Vérifier l'égalité : $(a + c)(\bar{b} - \bar{c}) = w$ et justifier que :

$$\frac{b + c}{b - c} = \frac{w}{|b - c|^2}$$

d- En déduire que le nombre complexe $\frac{b + c}{b - c}$ est imaginaire pur.

3. Soit H le point d'affixe $a + b + c$.

a- Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{CB}$

b- Prouver que $(\vec{CB}, \vec{AH}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et de même que $(\vec{CB}, \vec{BH}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c- Que représente le point H pour le triangle ABC ?

EXERCICE 3 :

Dans tout l'exercice le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1. Soit le point E d'affixe $z_E = 3 + i$ et le point F d'affixe $z_F = 1 + 3i$. Placer les points E et F

2. Construire le point H tel que EHF soit un triangle rectangle isocèle direct en H .

3. On désigne par z_H l'affixe du point H . Montrer que $\left| \frac{z_E - z_H}{z_F - z_H} \right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z_E - z_H}{z_F - z_H}\right) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

En déduire z_H affixe du point H

4. A, B, C, D sont quatre points de ce plan P

a- Construire les triangles rectangles isocèles directs BIA, AJD, DKC et CLB respectivement aux points I, J, K et L

b- Conjecturer sur les positions relatives des droites (IK) et (LJ) et les rapports des longueurs des segments $[IK]$ et $[LJ]$

5. On désigne par a, b et z_I les affixes respectives des points A, B et I .

a- Montrer que $\left| \frac{b - z_I}{a - z_I} \right| = 1$ et $\arg\left(\frac{b - z_I}{a - z_I}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

b- Etablir que l'affixe du point I est $z_I = \frac{ia - b}{i - 1}$

c- En utilisant une méthode analogue avec les complexes b, c et z_L affixes respectives des points B, C et L , exprimer z_L en fonction de b et c .

d- Avec c, d et z_K les affixes respectives des points C, D et K , exprimer z_K en fonction de c et d

e- Avec d, a et z_J affixes respectives des points D, A et J , exprimer z_J en fonction de d et a .

6. Montrer alors que $z_L - z_J = i(z_K - z_I)$

7. En déduire que les droites (JL) et (KI) sont perpendiculaires et que $JL = KI$

EXERCICE 4 :

A. $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan P . Soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe -1 . Soit F l'application de P privé de O dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tels que : $z' = -\frac{1}{z}$. On note alors $M' = F(M)$

1. Soit E le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$, on appelle E' son image par F . Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle puis sous forme cartésienne.

2. On note C_1 le cercle de centre O et de rayon 1 . Déterminer l'image C'_1 de C_1 par l'application F .

3. Soit K le point d'affixe $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $K' = F(K)$. Calculer l'affixe de K' .

4. Soit C_2 le cercle de centre O et de rayon 2 . Déterminer l'image C'_2 de C_2 par F .

5. On désigne par R un point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi[$. R appartient au cercle C_3 de centre A et de rayon 1.
- a- Montrer que $z' + 1 = \frac{\bar{z}-1}{z}$.
En déduire que $|z' + 1| = |z'|$
- b- En déduire que les images de ces points R sont sur une droite.
- B. On muni le plan P d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit g l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{i|z|}z$
- Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives par g des points A d'affixe π et B d'affixe 2π
 - Montrer qu'un point M est invariant par g si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que $OM = 2k\pi$. En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points invariants par g .
 - Soit C le point d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et Δ la demi-droite d'origine O passant par C et ne contenant pas le point O , M est un point de Δ d'affixe z et d'image M' par g .
Déterminer $|z|$ pour que M et M' soient symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$.
 - Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note C_k le cercle de centre O et de rayon $2k\pi$, D_k la couronne délimitée par les cercles C_k et C_{k+1} et a_k l'aire de la couronne D_k
 - Calculer l'aire a_k
 - Déterminer la nature de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
 - Calculer la limite de cette suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
 - Soit $k \in \mathbb{N}^*$
 - Déterminer les points $\Delta \cap D_k$ qui sont symétriques avec leur image par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$ du repère.
 - Montrer que D_k a son image par g dans D_k .
- EXERCICE 5 :**
PARTIE A :
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 12z + 153 = 0$
 - Dans le plan muni d'un repère complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et P d'affixes respectives : $z_A = \frac{3}{2} + 6i, z_B = \frac{3}{2} - 6i, z_C = -3 - \frac{1}{4}i, z_P = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$
 - Déterminer l'affixe z_Q du point Q image de B par la translation t de vecteur $\vec{w}$.
 - Déterminer l'affixe z_R du point R image de P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$
 - Déterminer l'affixe z_S du point S image de P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
 - Placer les points P, Q, R et S . Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.
 - Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$. En déduire la nature exacte du parallélogramme $PQRS$.

- Justifier que les points P, Q, R et S sont sur un même cercle noté (C) dont on calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon.
 - La droite (AP) est-elle tangente au cercle (C) ?
- PARTIE B :**
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ d'unité graphique 2 cm.
- On considère l'équation (E) :
 $z^3 - (6 + 3i\sqrt{3})z^2 + (-3 + 6i\sqrt{3})z + 4 + 9i\sqrt{3}$
 - Montrer que -1 est solution de (E). Résoudre l'équation (E).
 - On donne A, B, C et D les points d'affixes respectives $3, 2 + i\sqrt{3}, -1$ et $5 + 2i\sqrt{3}$
 - Démontrer que AIB est un triangle équilatéral.
 - Démontrer que les points B, C et D sont alignés.
 - Calculer l'affixe du point E de l'axe des réels pour que le triangle AED soit équilatéral
 - On désigne par O' le centre de gravité du triangle AIB .
 - Déterminer le rapport de l'homothétie h qui transforme A en E et I en A .
 - Montrer que $h(B) = D$ puis déterminer le centre de l'homothétie h .
 - Soit r la rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et f la similitude directe telle que $f = h \circ r$.
 - Donner l'angle et le rapport de f .
 - Quelle est l'image du triangle IAB par f ?
4. On pose $g = h \circ r^{-1}$.
- Déterminer l'image de IAB par g .
 - Déterminer le rapport et l'angle de g .
5. Soit Ω le centre de f . On désigne par K le milieu de $[IA]$. Déterminer K' l'image de K par f . Démontrer que Ω, A, D, E et Ω, E, K, K' sont cocycliques.
- EXERCICE 6 :**
- A. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = -x \end{cases}$
- Donner l'expression complexe de f et montrer que c'est une rotation que l'on caractérisera.
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) :
 $(1 - i)z^2 - 2i(m + 1)z + (1 + i)(m^2 + 1) = 0$ où m est un paramètre complexe.
 - Soient les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = m - i$ et $z_2 = 1 - im$. Etablir une relation indépendante de m liant z_1 et z_2 .
 - Montrer que $M_2 = f(M_1)$ et en déduire la nature du triangle AM_1M_2 où $A(1 - i)$
 - Dans cette question, on prend $m = e^{i\theta}$ où $\theta \in [0; \pi]$
 - Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit $[0; \pi]$
 - Déterminer suivant les valeurs de θ le module et un argument éventuel de z_1 .

- B.** Soit la suite de points M_n du plan complexe d'affixe z_n telle que $z_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
- $$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$$
- Déterminer le module et un argument de $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.
En déduire que pour tout n , M_{n+1} est l'image de M_n par la composée d'une rotation et d'une homothétie que l'on caractérisera.
 - a) Calculer les affixes z_1, z_2 et z_3 de M_1, M_2 et M_3 , que l'on placera dans le plan complexe. Vérifier que z_3 est réel.
Pour quelles valeurs de n , z_n est-il aussi réel ?
b) Soit $\theta_n \equiv \arg(z_n) [2\pi]$. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite périodique.
 - Calculer le rapport $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$. En déduire que le triangle $OM_n M_{n+1}$ est rectangle et que :
 $M_n M_{n+1} = \sqrt{3} OM_{n+1}$
 - Pour tout entier n , on pose $u_n = |z_{n+1} - z_n|$.

EXERCICE 8 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2cm)
On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (m+i)z + m - 1 - i$

PARTIE A :

- Peut-on choisir le réel m de telle sorte que T_m soit une translation ?
- Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

PARTIE B :

Dans la suite de l'exercice on pose $m = 1$.

- Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_1 .
 - Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculer $\frac{z'-1}{z-1}$
En interprétant géométriquement le module et un argument de $\frac{z'-1}{z-1}$ démontrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
 - Démontrer que, pour tout nombre complexe z , on a : $z' - z = i(z - 1)$
En déduire que, si M est distinct de Ω alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M .
 - On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant : $M_0 = O$, $M_1 = T_1(O)$, ... et pour tout naturel n non nul : $M_n = T_1(M_{n-1})$
- a- Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- b- Pour tout entier naturel n , on pose $d_n = \Omega M_n$.
Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique. Converge-t-elle ?

EXERCICE 9 :

- A.** Soit r la rotation de centre $\Omega(1+i)$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\vec{w}(1+i)$
- Soit A le point d'affixe $2+i$.
- a- Déterminer son image A' par r , puis l'image A'' de A' par t , ($A'' = tor(A)$)
- b- Placer A, A' et A'' sur une figure.
- Soit M'' l'image d'un point M d'affixe z par tor ; montrer que M'' a pour affixe z'' tel :
$$z'' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$
 - En déduire que tor est une rotation. Préciser son angle et déterminer l'affixe de son centre Ω' .
 - Quelle est la nature du triangle $\Omega' AA''$?
Placer le point Ω' très précisément sur la figure.
- B.** Le plan est muni d'un repère complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, I et F d'affixes respectives $i, 1-i, 2$ et $2+i, 1-i$,
- Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
- a- Déterminer l'affixe du point E antécédent de F par la rotation r .
- b- Soit $(\Delta): x - y + 1 = 0$. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ) image de (Δ) par r .
- Soit $T: P \mapsto P; M(z) \mapsto M'(z')$ telle que : $z' = az + b$ avec a et b sont des complexes dont $a \in \mathbb{C}^*$
- a- Déterminer a et b sachant que T laisse invariant I et transforme B en O .
- b- Montrer que $z' - 2 = (1-i)(z - 2)$
- c- En déduire une relation entre IM' et IM et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$
- d- Déduire du c) la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques.
- Soit $S = Tor$ et $M_n(z_n), M_0(z_0)$ avec $z_0 = 2i$ et M_{n+1} image de M_n par S .
- a- Montrer que $z_{n+1} = (1+i)z_n + 2 + 2i$
Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4
- b- On pose $Z_n = z_n + 2 - 2i$.
Démontrer que $Z_{n+1} = (1+i)Z_n$
- c- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 2(1+i)^n$
- On pose $U_n = M_n M_{n+1}$
- a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (\sqrt{2})^{n+2}$.
- b- Préciser la nature de la suite U_n .
- Soit $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$.
Exprimer L_n en fonction de n