

TS1 : ISOMETRIES PLANES ET APPLICATIONS AFFINES

EXERCICE 1 :

- A. On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre O tel que $AB \neq AD$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
Soit E le point du plan tel que CED est un triangle équilatéral direct.
- Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A) = E$ et $R(B) = D$.
 - Déterminer son angle θ et construire son centre I .
 - La droite (EC) coupe (AB) en F .
 - Montrer que le point $D \in [AE]$
 - Montrer que le triangle AFE est équilatéral direct.
 - Montrer que $R(F) = A$.
 - En déduire que I est le centre du cercle ζ circonscrit au triangle AEF .
 - Soit R' la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$
 - Déterminer $R'(D)$ et $R'(F)$.
 - En déduire que les droites (FD) et (BE) sont sécantes en un point J .
 - Montrer que $(\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JB}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$
 - On désigne par ζ' le cercle circonscrit au triangle ABC . Montrer que ζ' passe par I et J .
- B. On considère un triangle ABC tel que :
 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $AB < AC$. On désigne par ζ le cercle circonscrit à ce triangle de centre O .
- Faire une figure soignée.
 - Soit l'ensemble $E = \{M \in P / (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]\}$
 - Vérifier que $A \in E$ puis déterminer et construire l'ensemble E .
 - Déterminer et construire le point I du plan tel que $IB = IC$ et $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
 - Soit P le point du segment $[AC]$ tel que $CP = AB$
 - Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Quel est son angle ?
 - Déterminer le centre de la rotation R .
 - Donner la nature du triangle IAP et en déduire que $AC = AI + AB$
 - Soit M un point variable de l'ensemble E et G le centre de gravité du triangle MBC . Déterminer puis construire l'ensemble décrit par le point G lorsque le point M décrit l'ensemble E .

EXERCICE 2 :

- A. Soit $ABCD$ un losange de centre I tel que
 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$
Soit F l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.
Soit f un élément de F . On pose $f(I) = I'$.

- Montrer que $\overrightarrow{I'A} + \overrightarrow{I'B} + \overrightarrow{I'C} + \overrightarrow{I'D} = \vec{0}$
 - En déduire que le point I est invariant par toutes isométries $f \in F$.
 - Soit $f \in F$. Montrer que $f(A) \neq B$ et $f(A) \neq D$
 - On pose $f(A) = C$ et $g = S_{(BD)} \circ f$.
 - Montrer que g fixe les points A et I .
 - En déduire les éléments de F qui transforment le point A en C .
 - Déterminer les éléments de F qui fixent A .
 - En déduire que $F = \{Id_P, S_{(AC)}, S_{(BD)}, S_I\}$
- B. Soit $AFED$ un carré de côté 4 cm tel que
 $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et I les symétriques respectifs de A et O par rapport (EF) .
- Soit R la rotation définie par $R(F) = E$ et $R(E) = D$. Préciser le centre et l'angle de R .
 - Soit $f = R \circ S_{(OI)}$ où $S_{(OI)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OI) . Montrer que $f = S_{(OI)}$
 - Soit $R' = t_{\overrightarrow{OI}} \circ R^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{OI}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$ et R^{-1} désigne la réciproque de R .
 - Déterminer les images de O, F et A par R' .
 - Déduire que la rotation R' est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
 - Soit Δ la médiatrice du segment $[AF]$ et soit $g = S_{(AD)} \circ S_{\Delta} \circ S_{(OI)}$
 - Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
 - Soit M un point du plan. Montrer que $g(M) = R'(M)$ si et seulement si $f(M) = M$.
 - En déduire l'ensemble des points M tel que $g(M) = R'(M)$

EXERCICE 3 :

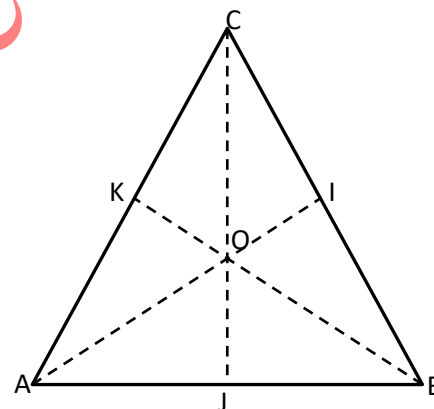
- A. Soit f l'application qui à tout $M(x + iy)$ associe le point $M'(x' + iy')$ et tel que
- $$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 2) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \end{cases}$$
- Montrer que : $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + 1$
 - On pose $f(O) = O'$. Vérifier que $O'M' = OM$
 - Déterminer l'ensemble des points invariants par f
 - Soit M'' d'affixe z'' et $(f \circ f)(M) = M''$
Exprimer z'' en fonction de z et montrer que l'application $f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.
 - Soit les points A et B d'affixes respectives $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2\sqrt{3}}i$ et l'application $g = t_{\frac{1}{2}\vec{u}} \circ f$

- a- Déterminer les affixes respectives des points A' et B' images de A et B par g .
- b- Montrer que g est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe Δ .
6. Montrer que $\frac{z_B - z_A}{z_1 - z_2}$ est un réel.
7. Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f .
- B.** On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$
1. Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$. Caractériser f .
2. Soit l'application $g = R_{(I, \frac{\pi}{2})} \circ f$
- a- Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle θ .
- b- Déterminer l'image $g(A)$ de A par g .
- c- Dédire une construction du point Ω centre de g .
3. Soit h l'antidépacement tel que :
 $h(A) = C$ et $h(I) = J$
- a- Montrer que h est une symétrie glissante.
- b- Montrer que $h(B) = D$.
- c- On pose $h(D) = D'$. Montrer que
 $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD'}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et que $AD = CD'$.
- d- En déduire que D' est le symétrique de B par rapport à C .
- e- En déduire la forme réduite de h .
4. Construire le point C' image de C par h .
5. Le cercle de diamètre $[AB]$ recoupe $[AC]$ en E , le cercle de diamètre $[CD]$ recoupe $[CC']$ en E' .
6. Soit F le symétrique de E' par rapport à (IJ) .
 Montrer que $h(E) = E'$ et que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IJ}$

EXERCICE 4 :

- A.** Le plan est orienté dans le sens direct.
 On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2AD$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
 On désigne par I, J et Ω les milieux respectifs de $[AB], [DC]$ et $[JB]$
1. Montrer qu'il existe un déplacement R tel que $R(B) = A$ et $R(C) = I$.
2. Caractériser l'application R .
3. Soit l'application $f = t_{JB} \circ R$
- a- Déterminer la droite Δ tel que $t_{JB} = S_{(IC)} \circ S_{\Delta}$
- b- En décomposant convenablement R , montrer que f est une rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
4. Soit l'application $g = f \circ S_{(DC)}$
- a- Déterminer $g(D)$ et $g(J)$
- b- En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

5. Soit l'application $h = S_{(AJ)} \circ g^{-1}$.
 Déterminer $h(B)$ et $h(C)$ puis caractériser h .
6. Soit M un point du plan et M_1 et M_2 les points tels que $g(M) = M_1$ et $t_{JB}(M) = M_2$
 Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.
7. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$ et soit φ l'application du plan lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -i\bar{z} + 3 + i$
- a- Montrer que φ est une isométrie
- b- Montrer que φ sans points fixes et en déduire la nature de φ .
- c- Montrer que $\varphi \circ \varphi = t_{2JB}$, puis prouver l'égalité $\varphi = g$.
- B.** Dans la figure ci - contre :
- ABC est un triangle équilatéral de centre O , tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
 - I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC], [AB]$ et $[AC]$ et $O' = S_{(AB)}(O)$



1. Montrer que $BOAO'$ est un losange de centre J et que $(BO') \perp (BC)$
2. Montrer qu'il existe un seul déplacement φ vérifiant $\varphi(B) = C$ et $\varphi(O') = O$
3. Préciser l'angle de φ . En déduire que φ est une rotation dont on précisera le centre.
4. Soit l'application $g = t_{CB} \circ \varphi$.
- a- Vérifier que $\varphi = S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$
- b- En déduire que g est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
5. Soit Ψ l'antidépacement tel que :
 $\Psi(B) = C$ et $\Psi(O') = O$
- a- Montrer que Ψ est une symétrie glissante d'axe la droite (IJ) .
- b- Déterminer $S_{IJ}(B)$. En déduire le vecteur $\vec{u}$ de Ψ .
6. Soit Ω l'intersection de (BK) et (IJ) .
 On pose $h = S_{\Omega} \circ \Psi$

a- Déterminer $h(J)$. En déduire que h est une symétrie orthogonale.

b- Vérifier que $S_{\Omega} = S_{(BK)} \circ S_{(IJ)}$.
En déduire que : $h = S_{(BK)} \circ t_{\vec{JI}}$

c- Déterminer l'axe de h

EXERCICE 5 :

A. On considère un carré $ABCD$ de centre I tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit E le point du plan tel que DCE est un triangle équilatéral direct.
On désigne par J, K et L les milieux respectifs des segments $[DC]$, $[AD]$ et $[DE]$ et par O le centre du cercle $\mathbb{C}$ circonscrit au triangle DCE .

1. On pose $\varphi = R_{(D; \frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}$.
Déterminer $\varphi(C)$ et $\varphi(D)$
2. Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques.
3. Caractériser l'application $t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(AB)}$.
4. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application $\Psi = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(AB)}$.
5. Pour tout point M du plan on considère les points $N_1 = R_{(D; \frac{\pi}{3})}(N)$ et $N_2 = R_{(O; -\frac{2\pi}{3})}(N)$.
Montrer que le milieu du segment $[N_1 N_2]$ est un point fixe que l'on précisera.

6. Soit M_0 un point du plan. On considère la suite de points (M_n) telle que pour tout :
 $n \in \mathbb{N}, \varphi(M_n) = M_{n+1}$
 - a- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\overrightarrow{M_0 M_{2n}} = (2n)\vec{JL}$
 - b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{2n} appartient à une droite fixe que l'on précisera.

B. Le plan est orienté dans le sens direct

1. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et A un point distinct de O .
On pose $A_1 = R(A)$, $A_2 = R(A_1)$ et pour $n > 1$, $A_{n+1} = R(A_n)$
 - a- Placer les points O, A, A_1, A_2, A_3
 - b- Montrer que $AA_2 A_4$ est un triangle équilatéral
 - c- Quelle est la nature du polygone $AA_1 A_2 A_3 A_4 A_5$?
 - d- Soit n un entier naturel non nul.
Montrer que $A_{6n} = A$
 - e- Déterminer A_{19} et A_{2019}
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et A un point distinct de O .
On pose $A_1 = R(A)$, $A_2 = R(A_1)$ et pour $n > 1$, $A_{n+1} = R(A_n)$

- a- Déterminer $(\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OA_{i+1}})$ et en déduire la mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_{n-1}})$
- b- Montrer que $A_n = A$ et $A_{n+1} = A_1$
- c- Préciser les points A_{n+4} , A_{3n+2} et A_{2n+1}
- d- Préciser la nature du polygone $AA_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}$ lorsque $n = 4, n = 5, n = 7$.

EXERCICE 6 :

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(a; 0)$, $B(0; 2)$ et $C(0; -2a)$ où a est un réel non nul.

1. Justifier que (O, A, B) est un repère du plan.
2. Soit f_a l'application affine définie de :
 $P \rightarrow P$ telle que :
 $f_a(A) = A, f_a(B) = B$ et $f_a(O) = C$
 - a- Soit M un point de la droite (AB) . Exprimer M comme barycentre des points A et B .
 - b- En déduire que tout point de la droite (AB) est invariant par f_a .
3. On considère φ_a l'application linéaire associée à l'application f_a
 - a- Démontrer que :
 $\varphi_a(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\varphi_a(\vec{j}) = (a+1)\vec{j}$
 - b- En déduire l'expression analytique de f_a .
4. Calculer les coordonnées de $f_a \circ f_a(M)$ où M est un point de coordonnées $(x; y)$.
5. Montrer qu'il existe une unique valeur b pour laquelle : $f_b \circ f_b = Id_P$
6. Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f_b
7. Montrer que pour tout point M de P et M' son image par f_b , $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{j}$ et le milieu de $[MM']$ est un point de l'ensemble (D)
8. En déduire la nature de l'application f_b
9. On suppose que a appartient à $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.
Démontrer que f_a est bijective.
10. Soit $M(x; y)$ un point quelconque qui n'appartient pas à la droite (AB) et M' son image par f_a .
 - a- Déterminer une équation de la droite (AB) .
 - b- Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
En déduire que M et M' sont distincts et que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.
- c- Déterminer les coordonnées du point H intersection des droites (MM') et (AB) .
- d- Calculer le nombre réel k tel que : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ et montrer que k est indépendant de M .
Caractériser f_a (On distinguera deux cas :
 $a = -1$ et $a \neq -1$)