

TS1 : COMPLEMENT D'ANALYSE :

EXERCICE 1 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{ax^n - xa^n}{x - a} ; \lim_{x \rightarrow a} (a^2 - x^2) \tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 + x + 1} - 2x \right) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1 - \cos x}} ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3} + \sqrt{x - 3}}{\sqrt{x^2 - 9}} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} \left[\frac{1}{1 - x} - (1 + x + x^2 + \dots + x^n) \right], n \in \mathbb{N}^* ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[\sin(\sin(x))]}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - \sin x} - 2}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + 19 - 3} ; \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt[3]{x + 54} - 4}{2\sqrt[3]{x + 17} - \sqrt[3]{20x + 16}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{1 + \cos x}}}{\sin^2 x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} E\left(\frac{1}{x}\right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right) - x}{E\left(\frac{1}{x}\right) + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2 + x)}{x(x + 2)} ; \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{\sin(2x)} - \frac{1}{\tan x} \right) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} - 1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x E(x) + 3}{x^2 + \sin(x)} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} E(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x - 3\cos x - 5}{\sin^2 x} ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 - \cos x - \sin x} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{6x - \pi} ; \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{\sin x - \sin a} ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{\cos(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(\sin x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\cos(x) - 1}{4\sin^2(x) - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3}{x + \sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x - 1) \left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x + \cos^2 x}{\sin x + \cos^2 x - 1} ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) \tan x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2(1 - \cos x)} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) ; \lim_{x \rightarrow 4} \frac{16\sqrt{x - \sqrt{x}} - 3\sqrt{2x} - 4\sqrt{2}}{16(x - 4)^2}$$

EXERCICE 2 :

1. On admet l'existence d'une limite réelle en 0

$$\text{par } f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3}$$

a- En transformation convenablement

$f(2x)$ trouver la valeur de cette limite

b- Utiliser le résultat précédent pour déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) - \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

2. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$g(2) = 0 \text{ et } g'(2) = 3$$

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(\sqrt{2 + x})}{x - 2} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g\left(2\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(g(x))}{x - 2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x^2 + x + 2)}{x}$$

3. Etudier les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{a - x} \quad b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\cos x - \cos a}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{a - x} \quad d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

4. Déterminer le développement limité d'ordre 3 de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin x ; \quad g(x) = \cos x ; \quad h(x) = \tan x ;$$

$$k(x) = \sqrt{1 + x} ; \quad p(x) = \frac{1}{1 - x} ; \quad q(x) = \frac{1}{x + 1}$$

5. En utilisant un développement limité calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - x}{x^2} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$$

EXERCICE 3 :

1. Dans chacun des cas suivants, peut-on prolonger la fonction f en 0 ? Si oui, déterminer son prolongement par continuité :

$$f(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x}} ; \quad f(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) ;$$

$$f(x) = \frac{\sin(1 - \cos x)}{\sin^2 x} ; f(x) = \frac{x^2 \sin[\tan^2 x]}{1 - \cos^2 x} ; f(x) =$$

$$xE\left(\frac{1}{\sin x}\right) ; f(x) = \frac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$$

2. Soit la fonction f définie sur $I = [-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x + 1} E\left[\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right] & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a- Etudier la continuité de f en 0.

b- Soit g la restriction de f sur $[0; 2]$.

Etudier la continuité de g sur $[2; 4]$

3. Soit $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue.

Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

4. Plus généralement : Soit $h : [a, b] \rightarrow J \subset [a, b]$ une fonction continue.

Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet au moins une solution sur $[a, b]$

5. Soit une fonction $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, α et β des réels strictement positifs. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que : $\alpha h(a) + \beta h(b) = (\alpha + \beta)h(c)$

6. Soit p une fonction de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que $\forall x \neq y : |p(x) - p(y)| < k|x - y|$ avec $0 < k < 1$. Montrer que l'équation $p(x) = x$ admet alors toujours une et une solution sur $[a, b]$

EXERCICE 4 :

1. On considère f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Soit n un entier naturel

non nul et pour $x \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$, on pose :

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

a- Justifier que pour $x \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ il existe deux réels m et M tels que $m \leq g(x) \leq M$

b- Montrer que pour n non nul on a :

$$g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0$$

c- En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et n fixé il existe

$$x_0 \in [0; 1] \text{ tel que } f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = f(x_0)$$

2. Soit α un réel et P un polynôme de degré $n \geq 2$.

On dit que α est une racine double de P s'il existe un polynôme Q de degré $(n - 2)$ tel que :

$$P(x) = (x - \alpha)^2 Q(x), \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } Q(\alpha) \neq 0$$

a- Montrer que α est une racine double de P alors

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \text{ et } P''(\alpha) \neq 0.$$

- b- On suppose que $P(\alpha) = 0$ et on désigne par f le polynôme tel que : $P(x) = (x - \alpha)f(x)$.
Montrer que si $P'(\alpha) = 0$ alors $f(\alpha) = 0$
- c- Donner une condition suffisante pour que α soit une racine double de P .
- d- Application : Montrer que 2 est une racine double du polynôme $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$
3. Soit $a > 0$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
On considère la fonction polynôme de P_n définie par la relation : $P_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - a$.
- a- Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution positive et une seule, que l'on notera x_n .
Montrer que $x_n < a$.
- b- Etudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est monotone.
- c- Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
On note l sa limite. Prouver que $0 \leq l \leq 1$
- d- Montrer que pour tout entier naturel n le nombre x_n est solution de l'équation :
 $x^{n+1} - (a+1)x + a = 0$.
En déduire que : $l = \frac{a}{a+1}$
4. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $I =]2; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{x-2}$
- a- Calculer $h'(x)$, $h''(x)$ et $h^{(3)}(x)$ pour tout x de I
- b- Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$
on a : $h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$

EXERCICE 5 :

- A. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$
1. Déterminer a et b tels que :
 $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{a}{x-1} - \frac{b}{x+1}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n tel que $\forall x \in D_f$:
 $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! P_n(x)}{2(x^2 - 1)^{n+1}}$ où $f^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f
- B. Soit $A_k = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k} + 1\right)$ avec $k \in \{-1; 2; 1\}$.
On considère la fonction $f_k(x) = \frac{A_k x + 1}{(\sqrt{x^2 + 1})^k} - A_k$
et on notera $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f_k
1. Dans ces questions on prend $k = -1$.
- a- Montrer que pour tout x réel :
 $(1 + x^2)f'_{-1}(x) + xf_{-1}(x) = 0$
- b- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout x réel on a :
 $(1 + x^2)f^{(n+2)}_{-1}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}_{-1}(x) + (n^2 - 1)f^{(n)}_{-1}(x) = 0$
- c- Démontrer que les dérivées d'ordre impair sont toutes nulles en 0
2. Dans cette question on prend $k = 2$.
Calculer $f'_2(x)$ et $f''_2(x)$
- a- Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel x : $f^{(n)}_2(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}}$ où P_n est une

fonction polynôme vérifiant la relation :

$$P_{n+1}(x) = (1 + x^2)P'_n(x) - 2(n+1)xP_n(x)$$

- b- Déterminer par récurrence le degré ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme $P_n(x)$.

EXERCICE 6 :

On considère la fonction h définie sur $[0; 2\pi]$

$$\text{vers } \mathbb{R} \text{ par : } \begin{cases} h(x) = \sin \left[xE \left(\frac{\pi}{x} \right) \right] & \text{si } x > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

- Etudier la continuité de h en 0.
- Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $E \left(\frac{\pi}{x} \right) = 0$
puis $E \left(\frac{\pi}{x} \right) = p$ où $p \in \mathbb{N}^*$
- Donner l'expression de h sur $[\pi; +\infty[$ puis sur chaque intervalle $\left] \frac{\pi}{p+1}; \frac{\pi}{p} \right]$, $p \in \mathbb{N}^*$
- Etudier la continuité de h en $\frac{\pi}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
En déduire le domaine de continuité de h sur l'intervalle $[0; 2\pi]$
- Montrer que la limite de h à droite de $\frac{\pi}{p}$ est finie
puis donner sa valeur y_p .
- Montrer que les points $M_p \left(\frac{\pi}{p}, y_p \right)$, $p \in \mathbb{N}^*$
appartiennent à une courbe S dont on donnera une équation cartésienne.
- Montrer que h est dérivable sur chaque intervalle $I_p = \left] \frac{\pi}{p+1}; \frac{\pi}{p} \right]$, $p \in \mathbb{N}^*$
- Calculer la dérivée de h sur l'intervalle $I_p = \left] \frac{\pi}{p+1}; \frac{\pi}{p} \right]$. En déduire h réalise une bijection de $I_p = \left] \frac{\pi}{p+1}; \frac{\pi}{p} \right]$ vers un intervalle J_p que l'on précisera.
- Montrer que la restriction h_p de h sur $I_p = \left] \frac{\pi}{p+1}; \frac{\pi}{p} \right]$ admet une bijection réciproque dérivable sur un intervalle à préciser et vérifiant $(h_p^{-1})'(x) = \frac{1}{p\sqrt{1-x^2}}$
- Tracer la courbe représentative de h et la courbe S sur l'intervalle $\left] \frac{\pi}{6}; \pi \right]$ dans un repère orthonormé d'unité 5 cm.

EXERCICE 7 :

- A. On définit la fonction h_m sur $\mathbb{R}$ par
 $h_m(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - mx$ où m est un paramètre réel.
- Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de h_m
 - Montrer que h_0 admet des asymptotes dont on précisera les équations ainsi que les positions relatives par rapport à la courbe de h_m
 - On définit g_m par $g_m(x) = \frac{(m^2 - m)x^2 + 2mx + 1}{(m-1)x^2 + x - 2}$
où m est un paramètre réel.
- a- Discuter suivant les valeurs de m les limites de cette fonction en $+\infty$ et en $-\infty$

b- Montrer que g_0 admet une asymptote dont on précisera une équation cartésienne.

B. Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = x^n + x - a \text{ avec } a \in]0; 1[$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive notée u_n
2. Calculer u_1 et u_2
3. Vérifier que pour tout n , $0 < u_n < a$
4. Montrer que $\forall x \in]0; 1[$ on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$
5. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
6. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

On notera ℓ la limite de cette suite.

7. Déterminer la limite de $(u_n)^n$ en $+\infty$
Donner alors la valeur de ℓ .

8. Soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$
 - a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a + \frac{a}{1-a} \frac{a^n-1}{n} \leq S_n \leq a$
 - b- En déduire alors la limite de S_n en $+\infty$.

EXERCICE 8 :

A. Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k$

1. Simplifier l'écriture $(1-x)^2 f_n(x)$. En déduire une autre expression de $f_n(x)$ pour $x \neq 1$
2. $\forall x \in [0; 1]$, on pose $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$
 - a- Donner l'expression de $F(x)$
 - b- Représenter sur un même graphique et dans l'intervalle $[0; 1]$, les courbes des fonctions f_k pour $k \in \{1, 2, 3\}$
3. Montrer que pour tout n non nul, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution, notée u_n dans l'intervalle $[0; 1]$. Calculer u_1 et u_2 .
4. Etudier le sens de variations de la suite (u_n) .
En déduire qu'elle est convergente.
On note ℓ la limite de la suite (u_n) .
5. Montrer que $\forall x \in [0; \frac{1}{2}]$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$ on a :
 $|F(x) - f_n(x)| \leq 6 \frac{n+1}{2^{n+1}}$
6. Montrer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u_n) = F(\ell)$. En déduire la valeur de ℓ .

B. On considère la fonction g définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
par $g(x) = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

1. Justifier la dérivabilité de g sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et montrer que $g'(x) = \frac{1}{1-\sin x}$
2. Déduire que g est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Montrer que g^{-1} la réciproque de g est dérivable sur J et que $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{x^2+1}$
4. $\forall x \in J$, on pose $\varphi(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}(\frac{1}{x})$
 - a- Montrer que φ est dérivable sur J et calculer $\varphi'(x)$ la dérivée de la fonction $\varphi(x)$.

b- En déduire que $\forall x \in J, g^{-1}(x) = -g^{-1}(\frac{1}{x})$

EXERCICE 9 :

A. On rappelle que pour toute fonction f n fois dérivable $f^{(n)}$ désigne la dérivée à l'ordre n de f . On admet que $f^{(0)} = f$

1. Démontrer par récurrence que :
 $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin(-x + n\frac{\pi}{2})$
2. Donner la dérivée d'ordre n des fonctions suivantes : $\cos(ax + b)$ et $\sin(ax + b)$ où a est un réel non nul.
3. Démontrer par récurrence la formule de Leibniz :
Etant donnés deux fonctions u et v admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n on a :
 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$
- B.** Soit g une fonction dérivable telle que : $g'(x) = g(2x)$
 1. Montrer que g est deux fois dérivable puis calculer $g''(x)$ en fonction de $g(x)$.
 2. Calculer $g^{(3)}(x)$ et $g^{(4)}(x)$.
 3. Montrer par récurrence que g admet des dérivées de tous les ordres et exprimer la dérivée $g^{(n)}$ d'ordre n en fonction de $g(x)$.

C. On considère les fonctions f telles que pour tous réels x et x' on ait :

$$f(x+x') + f(x-x') = 2f(x)f(x') \quad (1)$$

1. Déterminer toutes les fonctions constantes f vérifiant la relation (1).
2. Donner un exemple de fonction non constante vérifiant la relation (1).
Dans toute la suite, on suppose que f n'est pas constante.
3. Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.
4. On suppose dans la suite que l'équation $f(x) = 0$ admet des racines et que la plus petite α est strictement positive. Soit (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé. Montrer que (C) admet $I(\alpha; 0)$ pour centre de symétrie. Montrer que f est périodique.
5. Montrer que si f admet une dérivée première f' alors on a : $f'(x) = -f'(\alpha)(x + \alpha)$ et que f admet des dérivées successives de tous ordres.

EXERCICE 10 :

A. f est une dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} \end{cases}$$

1. On pose $g(x) = f(2-x) + f(x)$, pour tout x réel.
 - a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$).
Calculer la valeur k .
 - b. En déduire que $A(1, 0)$ est centre de symétrie de la courbe C_f de f .
2. En remarquant $f'(x) \leq 1$ sur $[1; 2]$, prouver que $f(2) \leq 1$.

3. En remarquant que $f'(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$, montrer que f est majorée sur $[2, +\infty[$, $\left[\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\right]$
4. Encadrer la limite L de f en $+\infty$.
5. On pose $h(x) = \tan x + 1, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
 - a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f \circ h(x) = L$
 - b- Montrer que pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $f \circ h(x) = x$.
 - c- En déduire la valeur de L .
6. Etablir le tableau de variation de f sur $[1; +\infty[$
7. Tracer l'allure de la courbe de f
- B.** Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur J à préciser.
On note Arcsin sa réciproque.
 1. Etudier la dérivabilité de Arcsin sur J puis montrer, lorsqu'elle est dérivable, que :
 $(\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
 2. Montrer qu'il existe $c \in]0; 1[$ tel que, $\forall x \in]0, 1[, \text{Arcsin}(c) = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$.
En déduire que $\forall x \in]0, 1[, \text{Arcsin}(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

EXERCICE 11 :

PARTIE A :

Soit f la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$, vérifiant $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. En majorant $\frac{1}{1+x^2}$ sur $[0; 1]$, prouver que $f(1) \leq 1$.
3. Montrer qu'il existe une constante c telle que pour tout $x > 0$, on ait $f\left(\frac{1}{x}\right) = c - f(x)$.
En déduire que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$
4. Majoration de c :
 - a- Montrer que pour tout entier $k \geq 2$:
$$f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (1)$$
 - b- En déduire que pour tout entier $n \geq 3$: $f(n) \leq 2$
 - c- Prouver que $c \leq 2$.
5. On pose pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = \tan x$.
 - a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f \circ g(x) = c$
 - b- Montrer que pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $f \circ g(x) = x$.
 - c- En déduire la valeur de c .
6. A l'aide des renseignements précédents, tracer la courbe représentative de f (asymptotes, tangente à l'origine et au point d'abscisse 1)

PARTIE B :

1. Montrer que pour tout réel $u \geq 0$:
 $u - \sin u \leq u \cos u \leq 0$.
2. Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a :
 $u - \sin u(2 - \cos u) \leq 0$.
3. Soit $f(x) = \cos x, x \in [0; \pi]$
 - a- Montrer que f est bijective de $[0; \pi]$ vers $[-1; 1]$.

- b- Soit $\arccos$ sa fonction réciproque.
Calculer : $\arccos(-1)$; $\arccos(0)$ et $\arccos(1)$.
Etudier la fonction $\arccos$.
- c- Montrer que $\forall x \in]-1; 1[$ la fonction $\arccos$ est dérivable et que $(\arccos x)' = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
4. Soit $G(x) = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \arccos x$ pour $x \in [-1; 1]$.
 - a- Calculer $G(-1)$ et $G(1)$.
 - b- Montrer que $\forall x \in [-1; 1] : G(x) + G(-x) = -\pi$.
 - c- Montrer que G est dérivable sur $] -1; 1[$ puis calculer la fonction dérivée $G'(x)$.
5. Pour $\forall x \in [0, 1]$ on pose: $\varphi(x) = \frac{G(x)-G(1)}{x-1}$.
 - a- Calculer $\varphi(x)$ en fonction de $\arccos x$.
 - b- Montrer que : $\forall x \in [0; 1[$ on a :
$$0 \leq \varphi(x) \leq 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
 - c- En déduire que G est dérivable en 1.
 - d- Montrer que G est dérivable en -1.
 - e- Calculer la dérivée de G sur $[-1; 1]$.
6. Tracer la courbe de G dans un repère orthonormal.

EXERCICE 12 :

- A.** On considère la fonction $\tan : x \rightarrow \tan x$ définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que la fonction tangente est une bijection de I vers $\mathbb{R}$.
2. La bijection réciproque de la fonction tangente est appelée *Arctangente* notée Arctan .
 - a- Montrer que Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - b- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- B.** On suppose l'existence d'une fonction f définie sur $K =]-1; 1[$ et vérifiant $\forall x \in K$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + 1 \text{ et } f(0) = 0.$$

On note C sa courbe représentative.

1. Donner les variations de f sur K .
2. Montrer que la droite (T) d'équation $y = x$ est la tangente à C en $x_0 = 0$.
3. Montrer que la courbe C n'admet pas de tangente parallèle à $y = 2x$.
4. On définit sur K la fonction g par : $g(x) = f(x) - x$.
 - a- Justifier la dérivabilité de g sur K et prouver que $g'(x) = \frac{1}{2}f^2(x)$.
 - b- Dresser le tableau de variation de g sur K .
 - c- En déduire le signe de $g(x)$ sur K puis les positions relatives de C et (T) .
5. Justifier l'existence de $f^2(x)$.
Calculer $f^2(x)$ puis $f^2(0)$.

- C.** On se propose de déterminer l'expression de $f(x)$.

1. Montrer que f établit une bijection de K vers $f(K)$.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et montrer que $(f^{-1})'(x) = \text{Arctan}'\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
3. On considère la fonction : $h: x \rightarrow \text{Arc tan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
 - a- Dériver la fonction h .
 - b- En déduire que

$$(f^{-1})(x) = \sqrt{2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + k, k \in \mathbb{R}$$

- a- Déterminer $(f^{-1})(0)$, puis la constante k .
4. Dédire de ce qui précède l'expression de $f(x)$

www.groupe-excellence.sn