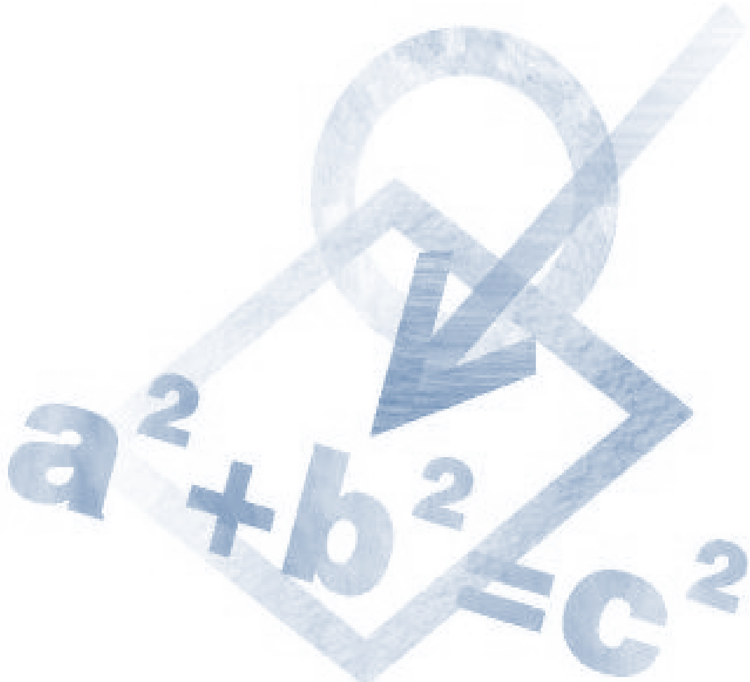
atomαth

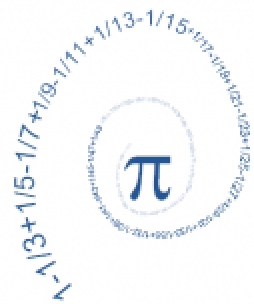
Volume 1. Avril 2011



AKIR ALI

- Suites réelles (3ème année math)
- Suites adjacentes
- Séries de révision (BAC Maths)
- Trouver le jour de la semaine
- Enigmes
- Approximation de π et $\sqrt{a}$
- Préparation aux olympiades de mathématiques

Sommaire



Introduction

" Le plaisir de rechercher .... La joie de trouver "

Cette revue est destinée aux élèves de la troisième et la quatrième année secondaires, section mathématique.

Elle paraît trimestriellement, au mois d'Avril, Octobre et Janvier.

Cette revue électronique est gratuite, vous pouvez la trouver sur le site : **http://maths-akir.midiblogs.com/.**

Elle comprend :

- Des exercices pour le niveau 3$^{\text{ème}}$ année secondaire.
- Approfondissement d'une partie d'un chapitre de programme de Baccalauréat accompagné des démonstrations et des exercices particuliers qui sont corrigés intégralement.
- Ensemble des sujets de révision ressemblant aux concours de Baccalauréat.
- Enigmes mathématiques.
- Des sujets d'Olympiades : des exercices pour préparer aux concours national de mathématique et les Olympiades internationales.

Nous espérons, par cette revue, rendre service aux élèves de la troisième et la quatrième année secondaires et les préparer aux concours.

NB : à partir de revue suivante, les élèves peuvent trouver des exercices de tous les niveaux secondaires.

.

AKIR ALI

$3^{ème}$ année maths : « suite réelle »

☞Exercice 1

Répondre par vrai ou faux. **Justifier la réponse.**

①Soit u la suite définie sur ℕ par :

$$u : \begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 9.u_n \end{cases}$$

u est une suite géométrique de raison q = 3.

②Soit u la suite définie sur ℕ par :

$$u : \begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 4 + u_n \end{cases}$$

u est une suite arithmétique de raison r = 2.

③Soit u une suite définie sur ℕ

$$\text{par } \begin{cases} u_0 \in IR \\ u_{n+1} = \frac{5}{2} + E(u_n) \end{cases}$$

Où : E(x) : la partie entière du nombre réel x.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique.

④Soit u une suite définie sur ℕ :

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 \in IR \\ u_{n+1} = 2.E(u_n) \end{cases}$$

Où E(x) : la partie entière du nombre réel x.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique

⑤Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 \in R^* \\ u_{n+1} = u_n + \frac{|u_n|}{u_n} \end{cases}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

☞Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} \end{cases}$$

①Montrer que pour tout n de ℕ : $u_{n+1} = 3 - \frac{u_n}{2}$

②Déterminer le valeur de a pour que la suite $v_n = u_n - a$ soit géométrique.

③En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

☞Exercice 3

On considère la suite réelle u définie par :

$$n \mapsto \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2 - \cos(\pi . u_n) \end{cases}$$

①Montrer que pour tout n de ℕ : u_n est un entier naturel non nul .

②Soit : $v_n = \cos(\pi u_n)$, pour tout n de ℕ.

a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$,
$\cos(\pi \cos(\pi u_n)) = -1$.

b) En déduire que v est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) En déduire u_n en fonction de n .

☞Exercice 4

On considère les suites réelles u et v définies sur ℕ par $v_n = (-1)^n n$ et $u_n = (-1)^n n^2$

①Vérifier que , pour tout n de ℕ :

$v_{n+1} = -v_n - (-1)^n$

②En déduire en fonction de n, $s_n(1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$

③Vérifier que ,pour tout n de ℕ :

$u_{n+1} = -u_n - 2v_n - (1)^n$

④En déduire , pour tout n de ℕ ,

$s_n(2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

☞Exercice 5

①Soient $(a_n)_{n\in N}$ et $(b_n)_{n\in N}$ deux suites réelles définies sur $\mathbb{N}$. On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \times b_k = b_{n+1}s_n - \sum_{k=0}^{n}(b_{k+1}-b_k)s_k$$

②**Application** : calculer en fonction de n, les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 \qquad \sum_{k=1}^{n} k.2^k \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)^2}{k(k+1)}$$

☞Exercice 6

On considère la suite réelle u définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \,; u_1 = 1 \\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + (q-1)u_n \end{cases}$

Partie A

Soit pour tout n de $\mathbb{N}$:

$s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \ (\ell \in R)$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{4(\ell-1)}{q-1} & \text{si } q \neq 1 \\ +\infty & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Partie B : **Dans cette partie on prend q = 0.**

Soit pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - \frac{u_n}{2}$

①Montrer que v est suite une géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison

②En déduire u_n en fonction de n.

③Montrer que pour tout $n \geq 2$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$

④En déduire que pour tout $n \geq 2$: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Partie C : **Dans cette partie on prend : q > 0.**

Soit pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_n = u_{n+1} - au_n$

①Déterminer les valeurs de a pour que w soit une suite géométrique.

②En déduire u_n en fonction de n et q.

③Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$ suivant les valeurs de q .

Partie D **Dans cette partie on prend q = -3.**

①Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+3} = -u_n$

②(u_n)-est-elle une suite périodique ?Si oui déterminer sa période.

③Soient pour tout n de $\mathbb{N}$:

$a_n = u_{3n}$, $b_n = u_{3n+1}$ et $c_n = u_{3n+2}$

a) Déterminer la nature de chaque suite.

b)Existe-t-il $\lim_{n\to+\infty} u_n$? Justifier votre réponse

c)Exprimer s_n en fonction de n.

☞Exercice 7

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère la suite réelle u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \dfrac{\sin 2\theta}{2\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 2u_n}$

Partie A

Déterminer les valeurs de u_0 tel que u soit une suite constante.

Partie B

Dans cette partie on prend $\theta = \frac{\pi}{4}, u_0 = \frac{1}{2}$.

Soit pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 2u_n}$.

①Montrer que v est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison

②Exprimer alors u_n en fonction de n.

Partie C **Dans cette partie on prend**

$\theta \neq \frac{\pi}{4}$ et $u_0 = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2}$

①Montrer que , pour tout n de $\mathbb{N}$:

i. Si $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ alors : $\sin\theta < u_n < \cos\theta$.

ii. Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors : $\cos\theta < u_n < \sin\theta$.

②Etudier la monotonie de u.

③Montrer que :

i. $|u_{n+1} - \cos\theta| \leq \cot an(\theta)|u_n - \cos\theta|$

si $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

ii. $|u_{n+1} - \sin\theta| \leq \tan(\theta)|u_n - \sin\theta|$

si $\theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

④En déduire que :

i. $\cos\theta - \frac{\cos\theta - \sin\theta}{2}\cot an^n(\theta) \leq u_n \leq \cos\theta$

si $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^n(\theta)u_n$

ii. $\sin\theta - \frac{\sin\theta - \cos\theta}{2}\tan^n(\theta) \leq u_n \leq \sin\theta$

si $\theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n(\theta)u_n$

⑤Soit pour tout n de N : $w_n = \frac{u_n - \sin\theta}{u_n - \cos\theta}$.

a) Montrer que w est une suite une géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison

b) Exprimer alors u_n en fonction de n et θ

☞Exercice 8

Soit u la suite définie par :

$u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = n + \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{3^{k+1}}$

①Montre que , pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$2u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

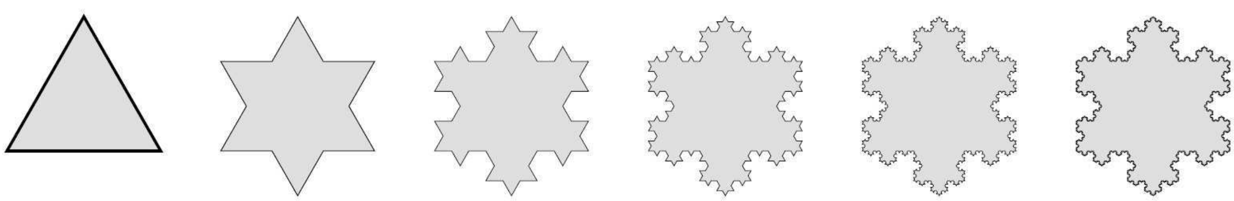
②Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Montre que $\forall n \in \mathbb{N}^* : s_n = (n+1)^2 + 2 - u_n$.

③Soit , pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - an - b$, où a et b deux réels .

a) Déterminer a et b pour que la suite v soit géométrique

b) En déduire v_n, u_n et s_n en fonction de n



Suites Adjacentes

Définition :

Dire que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes signifie que :

- L'une est croissante.
- L'autre est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Remarque : Dans le cas où (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

- Pour tout entier naturel n : $u_n \le v_n$.
- $\forall m,n \in \mathbb{N},\ u_m \le v_n$

Démonstration :

Montrons que, pour tout entier naturel n : $u_n \le v_n$.

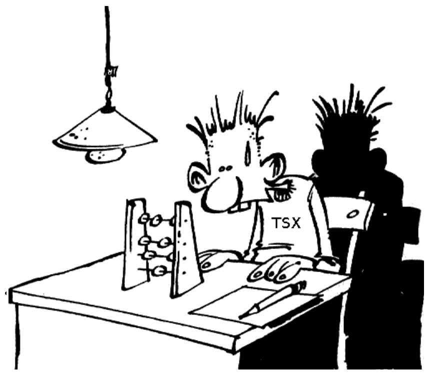
Supposons qu'il existe un entier k tel que $u_k > v_k$.

Comme (u_n) est croissante alors pour tout $n > k\ :\ u_n \ge u_k$.

Comme (v_n) est décroissante alors pour tout $n > k\ :\ v_n \le v_k$.

Alors $u_n - v_n \ge u_k - v_k > 0$. contradiction.

Donc, pour tout entier naturel n, $u_n \le v_n$.



Soient $m,n \in \mathbb{N}$, si $m \le n$, alors $u_m \le u_n \le v_n$ (car (u_n) est croissante)

si $m > n$, alors $u_m \le v_m \le v_n$ (car (v_n) est décroissante)

alors : $\forall m,n \in \mathbb{N},\ u_m \le v_n$

Exemple :

Pour $n \ge 1$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

- $u_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$.

  Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc (u_n) est croissante.

- $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n}$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n+n^2+n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

Donc (v_n) est décroissante.

- $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Théorème :

L'intérêt des suites adjacentes est qu'elles permettent d'une part de prouver l'existence d'une limite, d'autre part de fournir un encadrement de celle-ci aussi fin qu'on le souhaite. Ceci grâce aux deux propriétés suivantes:

- Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite ℓ
- Si c'est (u_n) qui est croissante et (v_n) qui est décroissante, alors :

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, \qquad u_m \le \ell \le v_n$$

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le u_{n+1} \le \ell \le v_{n+1} \le v_n$

Exemple :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Comme (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Démonstration :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

On sait que, pour tout naturel n, on a $u_n \le v_n$.

- Or (u_n) étant croissante, on a pour tout n, $u_0 \le u_n$.

  Donc $u_0 \le v_n$ pour tout n.

  Donc (v_n) est minorée et décroissante donc elle converge vers ℓ (réel).
- De la même façon, comme (v_n) est décroissante alors pour tout naturel n on a $v_n \le v_0$.

  Donc pour tout n, $u_n \le v_0$.

  Donc (u_n) est majorée et croissante donc elle converge vers ℓ' (réel).
- On sait aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \ell' - \ell$. Donc $\ell = \ell'$.
- $\forall m,n \in \mathbb{N},\ u_m \le v_n$

  L'entier m étant fixé, nous obtenons : $u_m \le \ell$ en faisant tendre n vers ∞.

  L'entier n étant fixé, nous obtenons : $\ell \le v_n$ en faisant tendre m vers .

EXERCICES « suites adjacentes »

☞Exercice 1

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

☞Exercice 2

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$.

☞Exercice 3

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

☞Exercice 4

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

☞Exercice 5

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)......\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

et $v_n = u_n + \frac{u_n}{n}$.

☞Exercice 6

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$ où $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

☞Exercice 7

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$ où $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$.

☞Exercice 8 (plus générale)

Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.

Pour tout n de , on pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$

Montrer que les suites extraites (s_{2n}) (s_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (s_n) converge.

☞Exercice 9

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n} - \ln(n)$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

☞Exercice 10

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

☞Exercice 11

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$u_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q}$

$v_{n+1} = \frac{qu_n + pv_n}{p+q}$ avec $0 < p < q$ fixés et $u_0 < v_0$.

☞Exercice 12

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $u_n = 2^n \sin\frac{\theta}{2^n}$ et $v_n = 2^n \tan\frac{\theta}{2^n}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

☞Exercice 13

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$0 < v_0 < u_0$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

☞Exercice 14

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$$0 < u_0 < v_0 \ , \ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

☞Exercice 15

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n v_n (u_n + v_n)}{u_n^2 + v_n^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes

☞Exercice 16

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$$u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n} \quad \text{où } x \text{ est un réel}$$

☞Exercice 17

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a & , \quad v_0 = b \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & , \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

①Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite $\ell > 0$.

②On suppose que $a = b\cos\varphi$; $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

Exprimer ℓ en fonction de b et φ.

☞Exercice 18

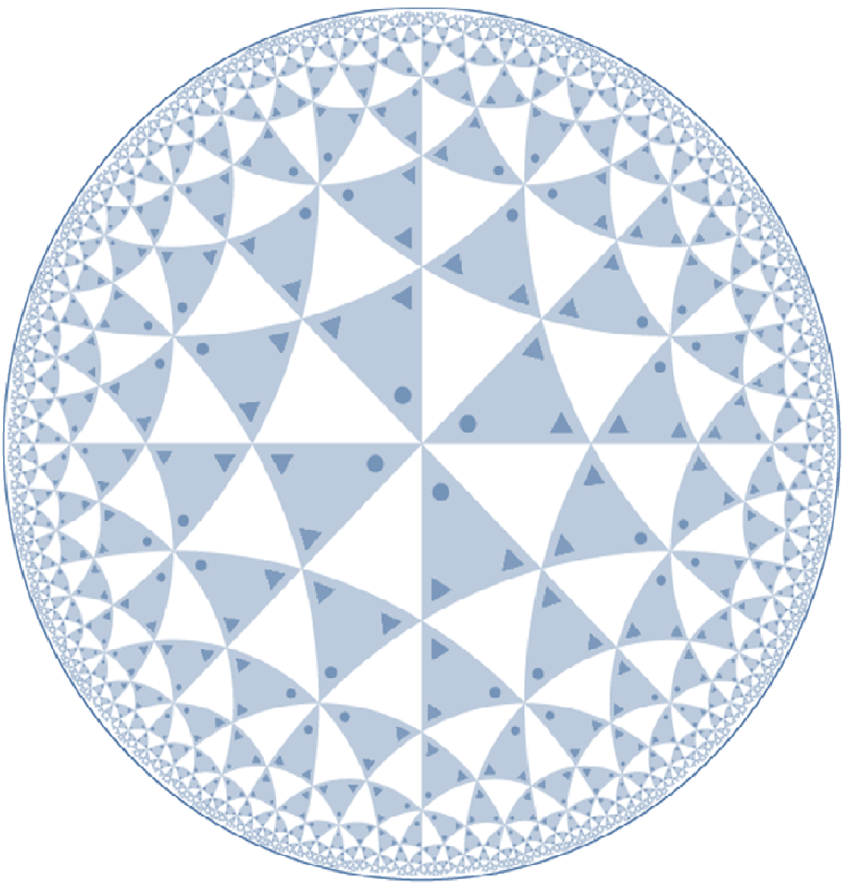
Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1°) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.

2°)Montrer que e est un nombre irrationnel.

3°)Donner une valeur approchée, par défaut, de e à 10^{-3} près



Pour aller plus loin

☞Problème n°1

①On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \geq n$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$.

②On considère les suites réelles (a_n) et (b_n) telles que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$$

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $b_n - a_n = \dfrac{1}{u_{2n}\, u_{2n+1}}$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 < b_n - a_n < \dfrac{1}{n}$.

c) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{u_{2n}\, u_{2n+2}}$.

d) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $a_n = \dfrac{1}{b_n} - 1$.

e) En déduire que les suites sont adjacentes et calculer leur limite commune.

f) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$

☞Problème n°2

Soients $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$ tel que $a_0 \geq b_0 \geq c_0 > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3} \quad , \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{c_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}\right)$$

①Montrer que (c_n) est croissante et (a_n) est décroissante .

②Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $a_{n+1} - c_{n+1} \leq \dfrac{2}{3}(a_n - c_n)$

③En déduire que (a_n) et (c_n) sont deux suites adjacentes . On note ℓ leur limite commune.

④Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$

☞Problème n°3

Soient $a_0, b_0 \in [0,1]$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{b_n}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 |x - b_n|\,dx \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{a_n}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 |x - a_n|\,dx$$

①Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $a_n, b_n \in [0,1]$

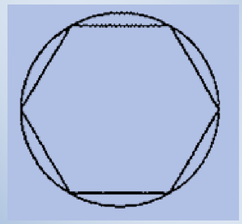
②En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{1 + b_n^{\,2}}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{2a_n - a_n^{\,2}}{2}$$

③Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes alors :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a = 2 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = b = \sqrt{2} - 1$$

Quel est le rapport du périmètre d'un hexagone régulier à la circonférence du cercle circonscrit ?



D'après OMB

④On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_n = a_n - a$ et $v_n = b_n - b$

a) Vérifier que $u_{n+1} = \dfrac{2bv_n + v_n^{\,2}}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2bu_n - u_n^{\,2}}{2}$

b) Montrer que $|u_n| \le a$; $|v_{n+1}| \le \dfrac{|u_n|}{\sqrt{2}}$ et $|u_{n+1}| \le \dfrac{|v_n|}{\sqrt{2}}$

c) En déduire alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2 - \sqrt{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{2} - 1$

☞Problème n°4

On considère la suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ définie par :

$$\begin{cases} 0 < 2\alpha_0 \le 3\alpha_1 \\ \forall n \in \mathrm{IN}^* \\ 0 < 6\alpha_n \le 9\alpha_{n+1} \le 9\alpha_n - 2\alpha_{n-1} \end{cases}$$

Etablir que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$

☞Problème n°5

On considère la suite réelle $(\beta_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ définie par :

$$\begin{cases} \beta_0 \ge 1 ; \beta_1 \ge 1 ; \quad x, y \in \mathrm{IR}_+^* \quad / \, x + y \ge 1 \\ \beta_{n+2} = x\sqrt{\beta_{n+1}} + y\sqrt{\beta_n} \end{cases}$$

Etablir que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = (x+y)^2$

Correction « suites adjacentes »

☞Exercice 1

1°) $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n}$.

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n+2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+(1+k)}-\frac{1}{n+k}\right)$$

$$=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}>0$$

Donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{n+1}-u_n-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n-2(2n+1)}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$=-\frac{3n+2}{n(n+1)^2}<0$$

Donc (v_n) est décroissante.

- $v_n-u_n=\frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

☞Exercice 2

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{3n^2}$.

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2(k+1)^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}>0$$

Donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{3(n+1)^2}-u_n-\frac{1}{3n^2}$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{1}{3(n+1)^2}-\frac{1}{3n^2}$$

$$=\frac{3n^2+n^2(n+2)^2-(n+1)^2(n+2)^2}{3n^2(n+1)^2(n+2)^2}$$

$$=\frac{3n^2-(2n+1)(n+2)^2}{3n^2(n+1)^2(n+2)^2}=-\frac{2n^3+6n^2+12n+4}{3n^2(n+1)^2(n+2)^2}<0$$

Donc (v_n) est décroissante.

- $v_n-u_n=\frac{1}{3n^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

☞Exercice 3

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}$ et $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$.

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+2}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$

Or $\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}>2\sqrt{n+1}$ donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1}-v_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+2\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

Or $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<2\sqrt{n+1}$

Donc (v_n) est décroissante.

$$v_n-u_n=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

☞Exercice 4

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n^{p-1}}$ avec $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$.

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^p}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}=\frac{1}{(n+1)^p}>0$$

Donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{(n+1)^{p-1}}-u_n-\frac{1}{n^{p-1}}$$

$$=\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}=\frac{(n+2)n^{p-1}-(n+1)^p}{n^{p-1}(n+1)^p}$$

$$=\frac{(n+2)\left(n^{p-1}-(n+1)^{p-1}\right)-(n+1)^{p-1}}{n^{p-1}(n+1)^p}<0$$

Donc (v_n) est décroissante.

$v_n-u_n=\frac{1}{n^{p-1}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

☞Exercice 5

$u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)=\left(1+\frac{1}{1^2}\right).....\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et $v_n=u_n+\frac{u_n}{n}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{1}{(n+1)^2}>1$ donc (u_n) est croissante.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}}{u_n}\times\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n(n+2)\left((n+1)^2+1\right)}{(n+1)^4}$$

$$=\frac{(n+1-1)(n+1+1)\left((n+1)^2+1\right)}{(n+1)^4}=\frac{\left((n+1)^2-1\right)\left((n+1)^2+1\right)}{(n+1)^4}$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^4}<1$$

Donc (v_n) est décroissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ_u

$$v_n-u_n=\frac{u_n}{n}\xrightarrow{n\to\infty}"\frac{\ell_u}{\infty}"=0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

☞Exercice 6

$a_n=u_{2n}$ et $b_n=u_{2n+1}$ où $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

$$a_{n+1}-a_n=u_{2n+2}-u_{2n}=\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$=\frac{(-1)^{2n}}{2n+1}+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$$

Donc (a_n) est croissante.

$$b_{n+1}-b_n=u_{2n+3}-u_{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+3}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$=\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2}+\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3}=\frac{-1}{(2n+3)(2n+2)}<0$$

Donc (v_n) est décroissante.

- $b_n - a_n = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+1}$

  donc $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 8

$a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$ où $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}$.

$$a_{n+1} - a_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}$$
$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{(4n+2)!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(4n+4)!} = \frac{-(4n+3)(4n+4)+1}{(4n+4)!}$$
$$= -\frac{16n^2+16n+12n+11}{(4n+4)!} < 0$$

Donc (a_n) est décroissante.

$$b_{n+1} - b_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3}\frac{(-1)^k}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}$$
$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{(4n+4)!} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(4n+6)!} = \frac{16n^2+44n+29}{(4n+6)!} > 0$$

Donc (b_n) est croissante.

- $b_n - a_n = u_{2n+1} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{(2k)!} = \frac{-1}{(4n+2)!}$

  donc $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Exercice 9

$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n} - \ln(n)$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n} + \ln(n)$$
$$= \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n+2}{n(n+1)} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

•Etude des variations de :

$f : [1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+2}{x(x+1)} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\forall x \in [1,+\infty[\ ,\ f'(x) = -\frac{3x+2}{x^2(x+1)^2} < 0$

alors pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n} + \ln(n)$$
$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

•Etude des variations de :

$g : [1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\forall x \in [1,+\infty[\ ,\ g'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$

alors pour tout $x \geq 1$, $g(x) \leq \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Donc (v_n) est décroissante.

$v_n - u_n = \frac{2}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 10

$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

$\ln(u_n) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\ln(v_n) = (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

•Etude des variations de :

$f : [1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$g : [1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\forall x \in [1,+\infty[\ ,\ f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \geq 0$ (Voir exercice 8)

Donc (u_n) est croissante.

$\forall x \in [1,+\infty[\ ,\ g'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \leq 0$. (car : $\ln(1+x) \leq x$)

Donc (v_n) est décroissante.

$$v_n - u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$
$$= e^{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
$$= e^{\frac{(n+1)}{n}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} - e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to+\infty} e - e = 0$$

donc $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 11

$u_{n+1} = \frac{qu_n + pv_n}{p+q}$ et $v_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q}$ avec $0 < p < q$ fixés et $u_0 < v_0$.

On a $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(q-p)(u_n - v_n)}{p+q}$

Alors $(u-v)_n$ est une suite géométrique

Donc $u_n - v_n = (u_0 - v_0)\left(\frac{q-p}{q+p}\right)^n < 0$

Alors pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < v_n$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{p(v_n - u_n)}{p+q} \geq 0$, donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \frac{p(u_n - v_n)}{p+q} \leq 0$, donc (v_n) est décroissante.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 12

$u_n = 2^n\sin\frac{\theta}{2^n} = 2^n\sin 2\frac{\theta}{2^{n+1}} = 2^{n+1}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}\cos\frac{\theta}{2^{n+1}} \leq u_{n+1}$

Donc (u_n) est croissante.

On a $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$$v_n = 2^n \tan\frac{\theta}{2^n} = 2^n \tan\frac{2\theta}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}\tan\frac{\theta}{2^{n+1}}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2^{n+1}}} \ge 2^{n+1}\tan\frac{\theta}{2^{n+1}} = v_{n+1}$$

Donc (v_n) est décroissante.

$$v_n - u_n = \frac{\tan(\theta/2^n)}{(1/2^n)} - \frac{\sin(\theta/2^n)}{(1/2^n)} \xrightarrow[N=2^n]{N\to\infty} \theta - \theta = 0$$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

☞Exercice 13

Remarque

On considère deux réels positifs x et y. On définit les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique de ces deux nombres (notées a, g, h et q) de la façon suivante :

☞Moyenne arithmétique : $a = \frac{x+y}{2}$

☞Moyenne géométrique : $g = \sqrt{xy}$

☞Moyenne harmonique : $\frac{2}{h} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ avec $x \ne 0$ et $y \ne 0$

☞Moyenne quadratique : $q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$

Propriété

Soit x et y deux réels strictement positifs.

$\min(x,y) \le h \le g \le a \le q \le \max(x,y)$, avec égalité si et seulement si x = y .

☒ ***Démonstration:***

Supposons que $x \le y$: alors max(x,y) = y et min(x,y) = x.

On a : $h = \frac{2xy}{x+y}$

On a : $h - x = \frac{2xy}{x+y} - x = \frac{xy - x^2}{x+y} = \frac{x(y-x)}{x+y} \ge 0$ alors $x \le h$

Ona:

$$g - h = \sqrt{xy} - \frac{2xy}{x+y} = \sqrt{xy}\left(\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x+y}\right) = \sqrt{xy}\,\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y} \ge 0$$

alors $h \le g$.

On a : $a - g = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \ge 0$

alors $g \le a$

On a

$$q^2 - a^2 = \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x^2+y^2+2xy}{4} = \frac{x^2+y^2-2xy}{4} = \frac{(x-y)^2}{4} \ge 0$$

alors $a \le q$

On a : $y^2 - q^2 = y^2 - \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{y^2-x^2}{2} \ge 0$ alors $q \le y$

Dans tout les cas, le cas d'égalité x = y.

****

$0 < v_0 < u_0$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} < 0$,donc (u_n) est décroissante.

$v_{n+1} - v_n = \sqrt{v_n}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right) > 0$,donc (v_n) est croissante.

La suite (v_n) est croissante et majorée par u_0 donc elle converge vers une limite notée ℓ_v

La suite (u_n) est décroissante est minorée par v_0 donc elle converge vers une limite notée ℓ_u

alors $\ell_u = \frac{\ell_u + \ell_v}{2} \to \ell_u = \ell_v$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

☞Exercice 14

$0 < u_0 < v_0$, $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(v_n - u)_n}{u_n + v_n} > 0$,donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0$,donc (v_n) est décroissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc elle converge vers une limite notée ℓ_u

La suite (v_n) est décroissante est minorée par u_0 donc elle converge vers une limite notée ℓ_v

alors $\ell_v = \frac{\ell_u + \ell_v}{2}$ alors $\ell_u = \ell_v$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

☞Exercice 16

$u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ et $v_n = \frac{E(10^n x)+1}{10^n}$ où x est un réel

On rappel que $x - 1 < E(x) \le x$, où x est un réel

$$u_{n+1} - u_n = \frac{E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x)}{10^{n+1}}$$

$10^{n+1}x - 1 < E(10^{n+1}x) \le 10^{n+1}x$ -

$> -10^{n+1}x \le -10E(10^n x) < 10 - 10^{n+1}x$

alors $-1 < E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x) < 10$ -

$> 0 \le E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x) \le 9$

alors $u_{n+1} - u_n \ge 0$ donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \frac{9}{10^{n+1}}$

On a $0 \le E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x) \le 9$

alors $0 \le u_{n+1} - u_n \le \frac{9}{10^{n+1}}$

Donc (v_n) est décroissante.

$v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

☞Exercice 17

$$0 < a < b, \begin{cases} u_0 = a & , \quad v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} & , \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} \end{cases}$$

1°)

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}\,(u_n - v_n)}{2\sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{v_n}}$$

Alors il est claire que $v_n \ge u_n$ (raisonnement par récurrence simple)

$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \ge 0$,donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_{n+1}}\left(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{v_n}\right)$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\sqrt{v_n}\,(u_n - v_n)}{2\sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{v_n}} \le 0$$

Donc (v_n) est décroissante.
La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc elle converge vers une limite notée ℓ_u
La suite (v_n) est décroissante est minorée par u_0 donc elle converge vers une limite notée ℓ_v

alors $\ell_v = \dfrac{\ell_u + \ell_v}{2} \to \ell_u = \ell_v$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2°) $a = b\cos\varphi$; $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

On a $u_0 = b\cos\varphi$ et $v_0 = b$

$$u_1 = \frac{u_0+v_0}{2} = \frac{b(1+\cos\varphi)}{2} = b\cos^2\frac{\varphi}{2} \text{ et } v_1 = b\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$u_2 = \frac{u_1+v_1}{2} == b\cos\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2^2} \text{ et } v_1 = b\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n : $v_n = b\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{\varphi}{2^n}$ et $u_n = v_n\cos\dfrac{\varphi}{2^n}$

C'est vrai pour $n = 1$ et si pour $n \geq 1$ donnée ,

on a : $v_n = b\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{\varphi}{2^n}$ et $u_n = v_n\cos\dfrac{\varphi}{2^n}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{v_n}{2}\left(1+\cos\frac{\varphi}{2^n}\right) = v_n\cos^2\frac{\varphi}{2^{n+1}}$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{v_n}{2}\left(1+\cos\frac{\varphi}{2^n}\right) = v_n\cos^2\frac{\varphi}{2^{n+1}}$$

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = v_n\cos\frac{\varphi}{2^{n+1}} \quad \left(\text{car } \cos\frac{\varphi}{2^{n+1}} > 0\right)$$

Et donc $v_{n+1} = b\prod\limits_{k=1}^{n+1}\cos\dfrac{\varphi}{2^n}$ et $u_{n+1} = v_{n+1}\cos\dfrac{\varphi}{2^{n+1}}$

On a montré par récurrence que , pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi}{2^n} \quad \text{et} \quad u_n = v_n\cos\frac{\varphi}{2^n}.$$

On a $2^n\sin\dfrac{\varphi}{2^n}v_n = b\sin\varphi$,$(\sin 2x = 2\sin x\cos x)$

Alors $v_n = \dfrac{b\sin\varphi}{2^n\sin\dfrac{\varphi}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = \dfrac{b\sin\varphi}{\varphi}$

☞Exercice 18

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}.$$

1°)

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

Donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!} = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

Donc (v_n) est décroissante.

$v_n - u_n = \dfrac{1}{n\times n!}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes

2°) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n < e < v_n$

Supposons que $e \in Q$, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tel que $e = \dfrac{p}{q}$

et on a $u_q < e < v_q$

$$u_q = \sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}$$

Les dénominateurs de toutes les fractions divisent q!.
On réduisant au même dénominateur, u_q s'écrit

bien $u_q = \dfrac{a}{q!}$. où a est un certain entier. Et

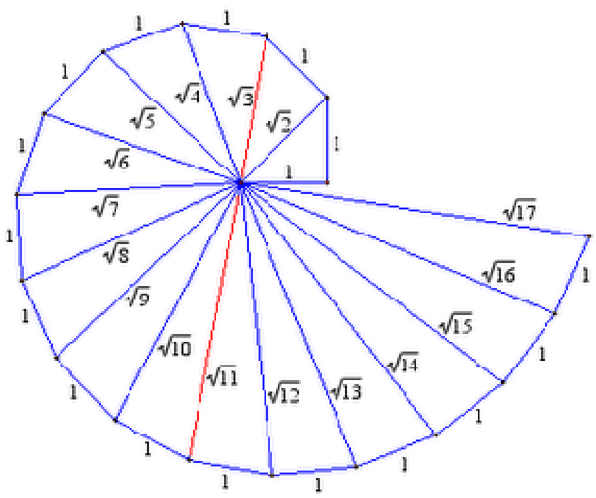
comme $v_q = u_q + \dfrac{1}{q\times q!}$,

il vient : $\dfrac{a}{q!} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{a}{q!} + \dfrac{1}{q.q!}$

$a < p(q-1)! < a + \dfrac{1}{q} < a+1$ est contradiction avec

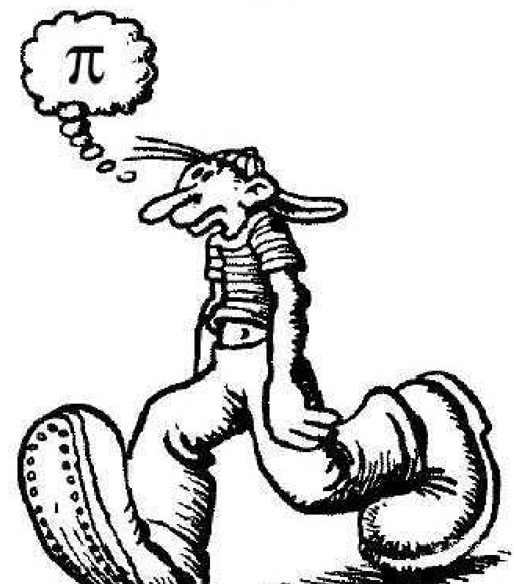
l'hypothèse a et $p(q-1)!$ sont des entiers naturels non nuls.
Alors e est un nombre irrationnel.
3°)il suffit de choisir n tel que $v_n - u_n \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire :

$\dfrac{1}{n.n!} \leq 10^{-3}$, soit $n \geq 6$ ce qui donne : $2{,}718 < e < 2{,}719$



Sujets de Révision

BAC MATH



Sujet n°1

☞Exercice 1

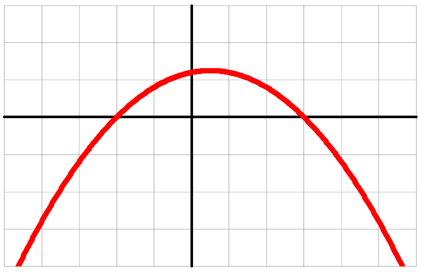
Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

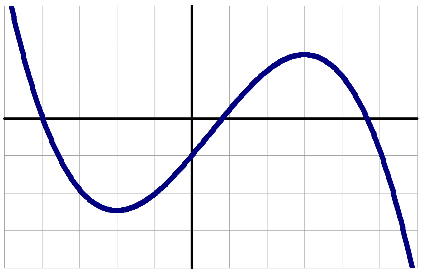
A°) La parabole ci-contre est la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré f dans un repère orthogonal.

Les points A(-2,0) et B(3,0) appartient à la courbe de la fonction f .

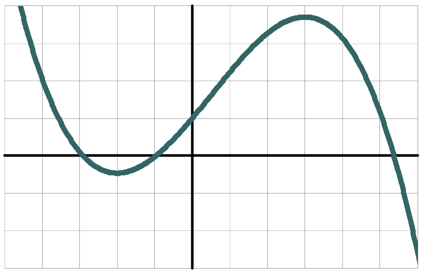
①Soit pour tout x de R : $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ où a est un réel .

Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une courbe ne peut pas être la représentation de la fonction F . Laquelle ?

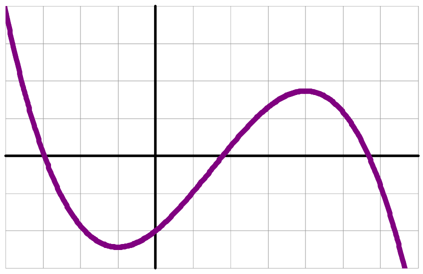




a



b

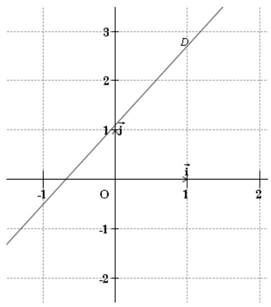


c

②f admet un extremum en x_0.

a $x_0=\frac{1}{4}$ b $x_0=\frac{1}{2}$ c $x_0=\frac{3}{4}$ d On ne peut pas trouver la valeur exacte de x_0 à partir de graphe

B°) La droite D ci-contre est la courbe représentative d'une fonction affine f dans un repère orthonormé.



①Soit A l'aire de la partie du plan limité par la droite D, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=1.

a $A=\frac{1}{2}[f'(0)+2f(0)]$ b $A=\frac{1}{3}[f'(0)+3f(0)]$ c On ne peut pas conclure.

②Soit $\zeta=\{M(x,y) \text{ tels que } y=f(x) \text{ ,} 0\le x\le 1\}$

On note par S les solides obtenus par rotation de ζ autour de l'axe (Ox).

Le volume V de S égale :

a $V=\frac{\pi}{2}\left[f'(0)^2+2f(0)^2+2f(0)f'(0)\right]$ b $V=\frac{\pi}{3}\left[f'(0)^2+3f(0)^2+3f(0)f'(0)\right]$ c On ne peut pas conclure.

☞Exercice 2

①On considère l'équation (E_p)d'inconnue (x , y) élément de $\mathbb{Z}^2$: $px-(2p+2)y=1$ où p est un entier impair supérieur ou égale à 3.

a) Justifier, que cette équation admet au moins une solution.
b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (E_p)
c) En déduire que les solutions de (E_p) sont : $x=p+(2p+2)k$ et $y=\frac{p-1}{2}+pk$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

②

a) Justifier que a^p-1 divise $a^{pn}-1$, $a, n \in \mathbb{N}^*$

b) (x, y) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (E_p),montrer que l'on peut écrire : $(a^{px}-1)-p(a^{(2p+2)y}-1)=p-1$.

c) En déduire l'existence de deux entiers α et β tels que :
$(a^p-1)\alpha+(a^{(2p+2)}-1)\beta=p-1$.

d) Montrer que tout diviseur commun à a^p-1 et $a^{(2p+2)}-1$ divise $p-1$

e) Déduire des questions précédentes le PGCD de a^p-1 et $a^{(2p+2)}-1$.

☞Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=-\frac{1}{2}i\bar{z}+2$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

①Montrer f est une similitude indirecte dont on déterminera le rapport et le centre Ω.

②Déterminer l'ensemble des ponts M d'affixe z tels que $2\overrightarrow{\Omega M'}=\overrightarrow{\Omega M}$. En déduire une équation de l'axe de f.

③On note A_1 l'image de A d'affixe i par f et pour tout entier naturel n non nul, A_{n+1} l'image de A_n par f.

a) Déterminer la longueur ΩA_{n+1} en fonction de ΩA_n.

b) A partir de quel entier n le point A_n appartient t-il au disque de centre Ω et de rayon 10^{-3} ?

c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $(\overrightarrow{\Omega A_1},\overrightarrow{\Omega A_n})\equiv\frac{(1-n)\pi}{2}[2\pi]$

d) En déduire l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels Ω, A_1 et A_n sont alignés.

④Déterminer l'affixe de point A_{2011}

☞Exercice 4

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.
On considère la suite (u_n) définie par :

$u_1=1$, $u_{n+1}=\varphi(u_n)$ où φ la fonction définie sur $[1,2]$ par : $\varphi(x)=\frac{5-x}{x+1}$

①

a) Etablir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}=-u_n+3$

b) Soit , pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n=u_n-b$, où b est un réel .

i) Déterminer b pour que la suite v soit géométrique

ii) En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

②Soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n=\int_1^2\varphi(x)e^{\frac{x}{n}}dx$

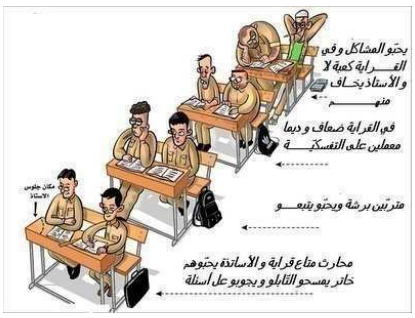
a) Montrer que $\varphi([1,2])=[1,2]$

b) En déduire que : $n(e^{\frac{2}{n}}-e^{\frac{1}{n}})\le\gamma_n\le 2n(e^{\frac{2}{n}}-e^{\frac{1}{n}})$

c) Montrer que, si (γ_n) possède une limite ℓ, alors $1\le\ell\le 2$.

③

a) Calculer l'intégrale $I=\int_1^2\varphi(x)dx$.



b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $e^{\frac{1}{n}}I\le\gamma_n\le e^{\frac{2}{n}}I$. En déduire que (γ_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

☞Exercice 5

I. Soit f et g les fonction définies par $f(x)=x+\ln(1-x)$ et $g(x)=x-\ln(1+x)$.

On désigne par (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (1cm)

①Montrer que f et g sont dérivables sur leurs domines de définitions et expliciter leurs fonctions dérivées.

②Sur quel intervalle la fonction $h: x \mapsto f(x)-g(x)$ est-elle définie ?

Soit φ la restriction de h à $]0,1[$. Montrer que φ est bijective puis expliciter sa fonction réciproque.

③Calculer les limites de f et g aux bornes de leurs domaines de définitions puis dresser leurs tableaux de variations.

④Etudier le comportement asymptotique de (ζ) puis la construire.

⑤Soit (ζ') la courbe de g dans le même repère. Montrer que $(\zeta')=S_O((\zeta))$.

⑥Soit A l'aire de la partie du plan limité par l'axe des ordonnées , la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$, la courbe (ζ) et la courbe (ζ'). Calculer A.

II. Soient u et v les suites réelles définies par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\begin{cases} u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n) \\ v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1) \end{cases}$

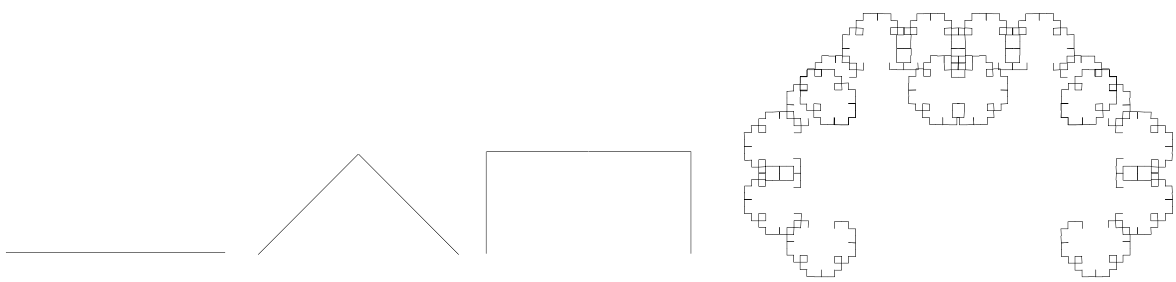
①Montrer que u est décroissante et v est croissante.

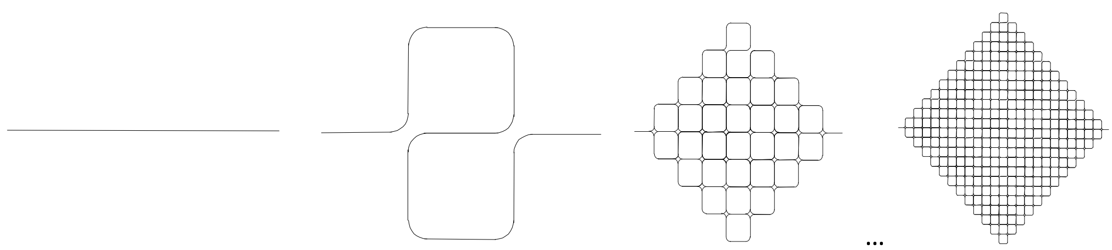
②Montrer que : pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $v_n \le u_n$.

③En déduire que u et v sont deux suites adjacentes.

On note par $\gamma=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ qui s'appelle la constante d'EULER .

④Pour $k\in\mathbb{N}^*$, trouver un entier naturel $\varphi(k)$ tel que : pour tout $n\ge\varphi(k)$, $|u_n-\gamma|\le 10^{-k}$.





Sujet n°2

☞Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

① $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{x^{2011}-1}{x-1}}$ est égale à :

$\boxed{a}$ e^{2010} $\boxed{b}$ e^{2011} $\boxed{c}$ $+\infty$

②L'équation $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ admet :

$\boxed{a}$: une unique solution dans R

$\boxed{b}$: deux solutions exactement dans R

$\boxed{c}$: n'admet aucune solution dans R

③ Soit D une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul orthogonal à D alors $S_D \circ t_{\vec{u}}$ est

$\boxed{a}$ Une symétrie orthogonale d'axe D' parallèle à D.

$\boxed{b}$ Une symétrie orthogonale d'axe D' perpendiculaire à D.

$\boxed{c}$ Une symétrie glissante.

☞Exercice 2

Soit (f_n) la suite définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, et pour tous entier naturel n : $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

①Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^{\ 2} = (-1)^n$.

②En déduire que f_n et f_{n+1} sont premiers entre eux pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

③Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout p de $\mathbb{N}^*$: $f_{n+p} = f_n f_{p-1} + f_{n+1} f_p$.

④En déduire que pour tous n , p de $\mathbb{N}^*$: $f_{n+p} \wedge f_p = f_n \wedge f_p$

⑤Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Si r désigne le reste de la division euclidienne de a par b,
Montrer que : $f_a \wedge f_b = f_b \wedge f_r$

⑥Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$: $f_m \wedge f_n = f_{m\wedge n}$

⑦Calculer alors $f_{2011} \wedge f_{620}$.

☞Exercice 3

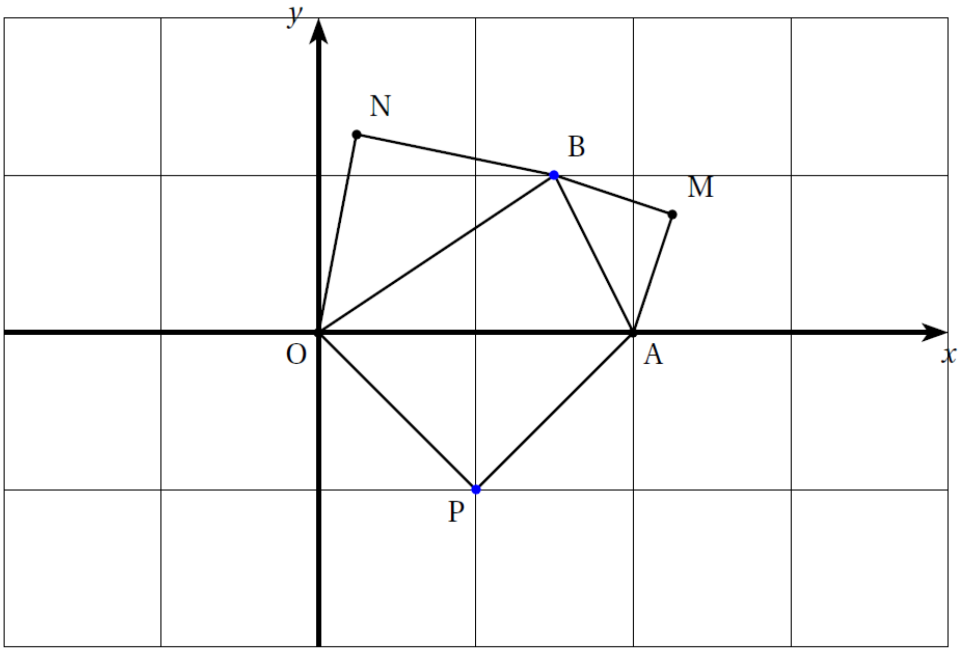
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.

On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N.

On considère la transformation $f = s_2 \circ s_1$.



Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

①

a) Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2 .

b) Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.

c) Justifier que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.

d) Quelle est l'image du point O par f ?

e) En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

②

a) Donner les écritures complexes de s_1 et s_2 .

b) En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.

c) Démontrer alors que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

☞Exercice 4

Soit pour tout réel t tel que: $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\,dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt$ où $n \in \mathbb{N}$

①Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$: $t \le \frac{\pi}{2}\sin(t)$.

②Etablir l'inégalité suivante pour tout entier n tel que $n \ge 0$: $0 \le J_n \le \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1})$.

③Montrer que pour tout entier n tel que $n \ge 0$: $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$

④Déduire des résultats précédents que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{J_n}{I_n} = 0$.

⑤Montrer que pour tout entier n tel que $n \ge 1$: $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$

⑥En déduire pour tout entier n tel que $n \geq 1$: $\frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \frac{J_n}{I_n} = \frac{1}{2n^2}$

⑦En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

☞Exercice 5

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ f_n(x) = x - n\ln(x)$$

①

a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

②

a) Montrer que : $\forall n \geq 3,\ 1 < u_n < e$.

b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n(u_n - 1) = 1$

③

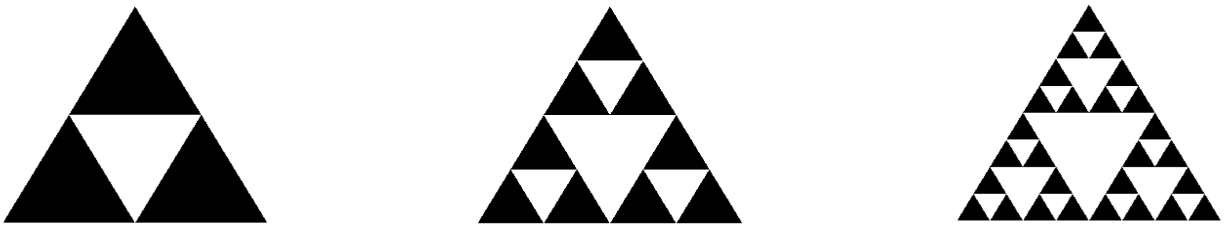
a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

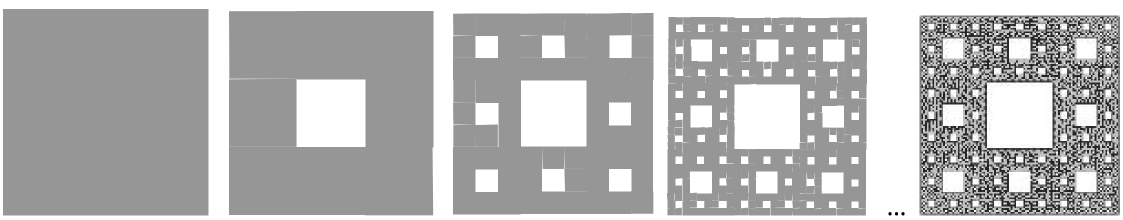
b) Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que : $\forall n \geq 3$: $n\ln(n) < v_n$.

c) Soit la fonction g, définie par : $\forall x \in R$, $g(x) = x - 2\ln(x)$. Etudier g et donner son signe. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 2\ln(n)$.

d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$ puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.

e) Montrer enfin que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{n\ln(n)} = 1$





Sujet n°3

☞Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

On pose $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

①La forme algébrique de z^2 est :

$\boxed{a}$ $2\sqrt{2}$ $\boxed{b}$ $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$ $\boxed{c}$ $2+\sqrt{2}-i\left(2-\sqrt{2}\right)$ $\boxed{d}$ $2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$

② z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

$\boxed{a}$ $4e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{b}$ $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{c}$ $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $\boxed{d}$ $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

③ z s'écrit sous forme exponentielle :

$\boxed{a}$ $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ $\boxed{b}$ $2e^{i\frac{\pi}{8}}$ $\boxed{c}$ $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$ $\boxed{d}$ $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$

④ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

$\boxed{a}$ $\frac{7\pi}{8}$ $\boxed{b}$ $\frac{5\pi}{8}$ $\boxed{c}$ $\frac{3\pi}{8}$ $\boxed{d}$ $\frac{\pi}{8}$

☞Exercice 2

On considère , dans le plan orienté, un triangle ABC rectangle en A tel que AC = 2AB et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.On désigne par F le projeté orthogonale de A sur (BC), $I=S_{(AB)}(F)$ et $J=S_{(AC)}(F)$

①

a) Montrer que : $(BI)\perp(AI)$ et $(CJ)\perp(AJ)$.

b) Caractériser l'application : $S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$ et en déduire que A = I*J.

②Soit S la similitude direct qui transforme B en A et A en C.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que F est le centre de S.

c) Montrer que : $S(I)=J$. En déduire que CJ = IJ.

③Soit σ la similitude indirect qui transforme I en F et F en J.

a) Déterminer le rapport de σ

b) Déterminer Ω le centre de σ. Montrer que $\overrightarrow{\Omega J}=4\overrightarrow{\Omega I}$

c) Soit E le point défini par $\overrightarrow{\Omega E}=2\overrightarrow{\Omega I}$. Montrer que l'axe (Δ) de σ est la médiatrice de $[EF]$

☞Exercice 3

①

a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que 7u − 13v = 1.

b) En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$.

c) Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que 14a − 26k = 4.

②On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\phi(n)$ le reste de la division euclidienne de an + b par 26.

On décide de coder un message, en procédant comme suit :

A chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associe puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.

On ne connait pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

a) Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\begin{cases} 5a+b\equiv 10[26] \\ 19a+b\equiv 14[26] \end{cases}$

b) En déduire qu'il existe un entier k tel que 14a − 26k = 4.

c) Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0\le a\le 25$ et $0\le b\le 25$ tels que
$\begin{cases} 5a+b\equiv 10[26] \\ 19a+b\equiv 14[26] \end{cases}$

③On suppose que a = 17 et b = 3.

a) Coder le message « GAUSS ».

b) Soit n et p deux entiers naturels quelconques.
Montrer que, si $\varphi(n)=\varphi(p)$, alors $17(n-p)\equiv 0[26]$

En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

④On suppose que a = 17 et b = 3.

a) Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n)+9-n$ par 26

b) En déduire un procède de décodage.

c) En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

☞Exercice 4

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x\in [0,+\infty[,\ f_n(x)=x^n+x-a \quad \text{où } a\in]0,1[$$

①

a) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n .

b) Calculer u_1 et u_2.

c) Vérifier que : $\forall n\in \mathbb{N}^*,\ 0<u_n<a$.

②

a) Montrer que, pour tout $x\in]0,1[$ on a : $f_{n+1}(x)<f_n(x)$.

b) En déduire le sense de variations de la suite (u_n) .

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

③

a) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Donner alors la valeur de ℓ.

④Soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $s_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k$.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $a+\dfrac{a}{1-a}\dfrac{a^n-1}{n}\le s_n\le a$

b) En déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$

☞Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}-2x$ et (ζ) sa représentation graphique.

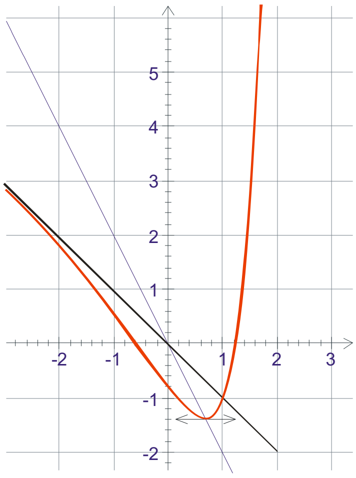
On note Δ la droite d'équation y = – 2x et Δ' la droite d'équation y = – x.

Parmi les courbes suivantes, une seule représente la courbe (ζ).

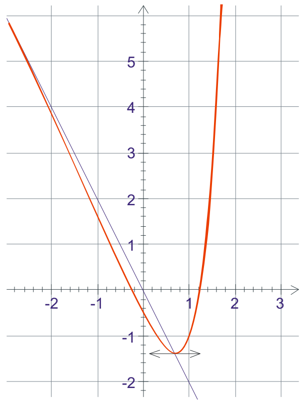
Il s'agit de démontrer que les autres ne peuvent pas représenter la fonction f.

On admet que les courbes rendent compte du comportement des fonctions représentées au voisinage de + ∞ et – ∞.

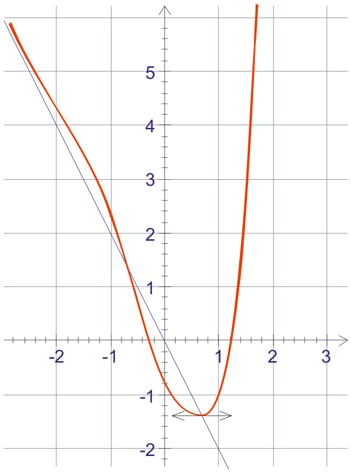
Toutes les tangentes parallèles à l'axe des abscisses sont indiquées sur les graphiques.



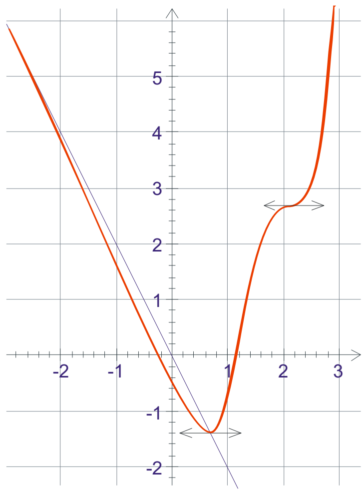
(ζ_1)



(ζ_2)



(ζ_3)



(ζ_4)

①

a) Déterminer les limites de la fonction f quand x tend vers – ∞ et + ∞.

b) Peut-on éliminer une des courbes ?

②

a) Calculer f '(x).

b) Quelle courbe peut-on éliminer, et pourquoi ?

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

③

a) Déterminer la limite de f(x) + 2x quand x tend vers – ∞ et interpréter graphiquement ce résultat.

b) Quelle courbe peut-on éliminer, et pourquoi ?

④

a) Etudier la position de la courbe (ζ) par rapport à la droite Δ .

b) Quelle courbe peut-on éliminer, et pourquoi ? Conclure.

Sujet n°4

☞Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

①Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x} + e^x - 6\sqrt{e^x} + 4}{\left(e^x - 1\right)^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

$\boxed{a}\ \dfrac{e^2}{4}$ $\boxed{b}\ \dfrac{7}{4}$ $\boxed{c}\ \dfrac{21}{13}$ $\boxed{d}\ +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - \lim\limits_{x \to 0} f(x)}{x} =$

$\boxed{a}\ -\dfrac{9}{23}$ $\boxed{b}\ \dfrac{9}{23}$ $\boxed{c}\ -\dfrac{3}{8}$ $\boxed{d}\ +\infty$

②Soit pour tout x de ℝ, $h(x) = x + \int_0^1 |t - x|\,dt$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) =$

$\boxed{a}\ +\infty$ $\boxed{b}\ -\infty$ $\boxed{c}$ un nombre réel ℓ fini

☞Exercice 2

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

On donne les points A, B et C définis par leurs affixes:
z_A = -2i ; z_B = 1+i; z_C = -5+3i.
On désigne par f la similitude plane directe telle que f(A) = B et f(B) = C.
①
a) Déterminer l'expression complexe de la similitude f.
b) En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.
On note dans la suite par Ω le centre de la similitude f.
②Cette question de l'exercice doit être traitée sans utilisation des nombres complexes.
On désigne par C le cercle de centre A passant par Ω et par C′ le cercle de centre B passant par Ω.
Les cercle C et C′ se coupent en Ω et en un autre point M.
a) Soit N l'antécédent de M par f . Démontrer que le point N est le point diamétralement opposé à M sur le cercle C
b) Soit P = f(M). Démontrer que le point P est le point diamétralement opposé à M sur cercle C'
c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g = fof.
d) En déduire que les points Ω, N et P sont alignés. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{NP}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\Omega N}$.

☞Exercice 3

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère le tétraèdre ABCE tel que A(1,0,2) , B(0,0,1) , C(0,-1,3) et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
①

a) Vérifier que E à pour cordonnées (0,2,3).

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE.

②

a) Soit P le plan d'équation : $x-2y-z+5=0$. Montrer que P est parallèle au plan (ABC).

b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Calculer les cordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan P.

③Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K.

a) Déterminer le rapport de h.

b) Le plan P coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J.

Calculer le volume du tétraèdre EIJK.

☞Exercice 4

Soit f la fonction définie pour tout x strictement positif par : $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\ln x-\dfrac{1}{2}$

①Etudier les variations de f. Donner sa représentation graphique.

②Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0, +∞[. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^1 f(t)dt$.

③Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose : $S_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(\dfrac{j}{n}\right)$

a) Etablir, pour tout entier j vérifiant $1\le j\le n$, les inégalités : $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{j+1}{n}\right)\le\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)dx\le\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{j}{n}\right)$

b) En déduire l'encadrement : $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx\le S_n\le\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$.

c) Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

④On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, on a l'égalité : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la somme $\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(\dfrac{j}{n}\right)$ en fonction de n.

En déduire la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)$.

☞Exercice 5

①Soient f et g deux fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1}\quad\text{et}\quad g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)+\frac{1}{x+1}.$$

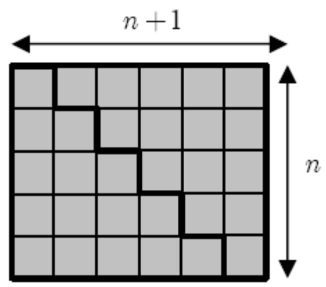
a) Etudiers les variationsde f et g .

b) Déterminer le signe des fonctions f et g .

②Soit u et v les deux suites définies par : pour tout n de N*

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln(n)\quad\text{et}\quad v_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$$

Montrer que u et v sont deux suites adjacentes



$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Sujet n°5

☞Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

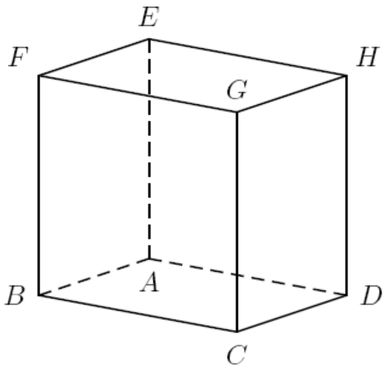
Soit ABCDEFGH un carré de côté 1.

On choisit le repère orthonormal $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].

L est le barycentre de {(A, 1); (B, 3)}.

Soit (P) le plan d'équation 4x − 4y + 3z − 3 = 0.



①Les coordonnées de L sont :

$\boxed{a}$ $\left(\frac{1}{4},0,0\right)$ $\boxed{b}$ $\left(\frac{3}{4},0,0\right)$ $\boxed{c}$ $\left(\frac{2}{3},0,0\right)$

②Le plan (P) est le plan :

$\boxed{a}$ (GLE) $\boxed{b}$ (LEJ) $\boxed{c}$ (GFA)

③Le plan parallèle au plan (P) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées :

$\boxed{a}$ $\left(1,0,\frac{1}{4}\right)$ $\boxed{b}$ $\left(1,0,\frac{1}{5}\right)$ $\boxed{c}$ $\left(1,0,\frac{1}{3}\right)$

④

$\boxed{a}$ Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B

$\boxed{b}$ Les droites (EL) et (IM) sont parallèles

$\boxed{c}$ Les droites (EL) et (IM) sont sécantes

⑤Le volume du tétraèdre FIJM est :

$\boxed{a}$ $\frac{1}{36}$ $\boxed{b}$ $\frac{1}{48}$ $\boxed{c}$ $\frac{1}{24}$

☞Exercice 2

Sur la figure donnée ci-dessous, on considère les carrés OABC et OCDE tels que :

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

On désigne par I le milieu du segment [CD], par J le milieu du segment [OC] et par H le point d'intersection des segments [AD] et [I E].

①Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E.

②Déterminer le rapport et l'angle de cette similitude s.

③Donner, sans justifier, l'image de B par s.

④Déterminer et placer l'image de C par s.

⑤Soit Ω le centre de la similitude s.

a) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AI] et à celui de diamètre [DE] .

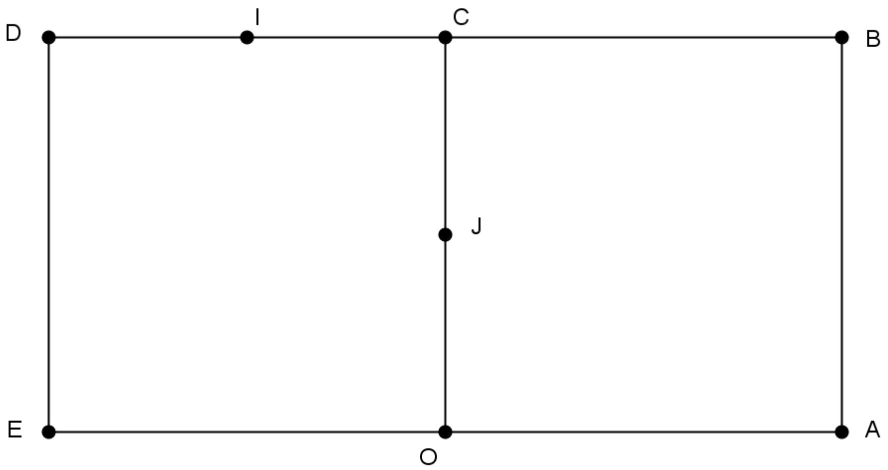
b) Montrer que Ω ne peut être le point H.

c) Construire Ω .

⑥On considère le repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$.

a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.

b) En déduire l'affixe du centre Ω de s.



Exercice 3

①On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs n tels que : $\begin{cases} n \equiv 3[11] \\ n \equiv 1[13] \end{cases}$

a) Vérifier que 300 est solution du système.
b) Soit n un entier relatif solution de ce système.
Démontrer que n peut s'écrire sous la forme $n = 3 + 11y = 1 + 13x$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant $13x - 11y = 2$.
c) Résoudre l'équation $13x - 11y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
d) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $n = 14 + 143k$.
e) Démontrer l'équivalence entre $n \equiv 14[143]$ et $\begin{cases} n \equiv 3[11] \\ n \equiv 1[13] \end{cases}$

②
a) Existe-t-il un entier naturel α tel que $9^{\alpha} \equiv 1[13]$?
b) Existe-t-il un entier naturel β tel que $9^{\beta} \equiv 14[143]$?

Exercice 4

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie,

pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$, par : $P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$

I. ①Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$: $P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$,où P_n désigne la dérivée de P_n.

②Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

③Etudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

④
a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$: $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$
b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geq 0$.

⑤Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n, et que $1 < x_n \leq 2$.

II. ①Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0 ; +\infty[$: $P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$

②En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt$

③Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1 ; +\infty[$: $t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

④En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$, puis : $0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$

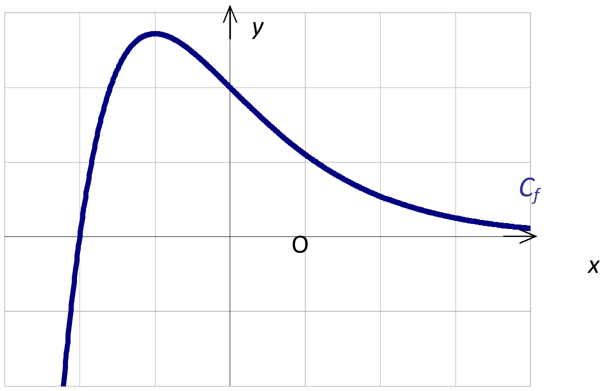
⑤Calculer alors, la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

☞Exercice 5

La courbe (ζ_f) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur R dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On note f ' la fonction dérivée de f.

La courbe (ζ_f) vérifie les propriétés suivantes :

- Les points de coordonnées respectives (-2 , 0) et (0, 2)appartiennent à la courbe tracée ;
- la tangente au point d'abscisse −1 est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente au point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en x = 2.



①Donner une équation de la tangente à la courbe (ζ_f) au point d'abscisse 0.

②Parmi les quatre représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f ' de f et une autre une primitive F de f sur R.

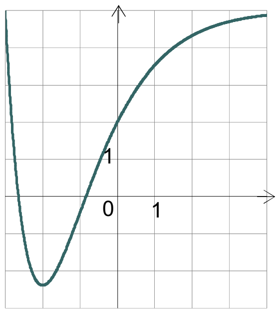


Figure 1

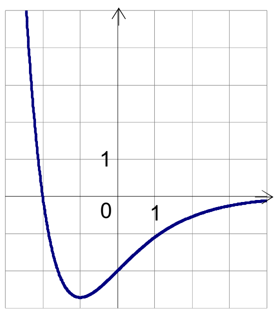


Figure 2

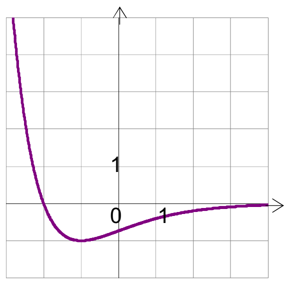


Figure 3

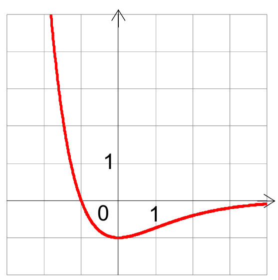


Figure 4

Déterminer la courbe associée à la fonction f ' et celle qui est associée à la fonction F. Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix.

③On admet que la fonction f est définie par une expression de la forme $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.

a) En utilisant les propriétés de la courbe (ζ_f) données au début de l'exercice, calculer a et b.

b) Étudier les variations de la fonction f.

c) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution $0<\alpha<2$

④Expliciter F(x) pour tout x de R.

⑤Calculer l'aire A du domaine limité par (ζ_f), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=1.

⑥Soit $C=\{M(x,y)\quad/\quad y=f(x)\quad ,0\le x\le 1\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox).Calculer le volume de S.

Sujet n°6

☞Exercice 1

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une réponse fausse, on pourra donner un contre-exemple.

①Pour tout complexe z, $\mathrm{Re}(z^2)=(\mathrm{Re}(z))^2$.

②Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v},)$

Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'affixe z, N d'affixe $\bar{z}$ et P d'affixe $\frac{z^2}{\bar{z}}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

③Pour tout nombre complexe z, si $|1+iz|=|1-iz|$,alors la partie imaginaire de z est nulle.

④ Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v},)$

Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité $|z+z'|=|z-z'|$, alors les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires

☞Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC der sens direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés ABDE et ACFG, ainsi que le parallélogramme AGKE.

On désigne par M=B*C et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

①
- a) Montrer qu'il existe un déplacement f dont on déterminera ses éléments caractéristiques transformant le triangle ABC en le triangle GKA.
- b) Montrer que les points H , A , K sont alignés.
- c) Montrer que les droites (AM) et (EG) sont perpendicularités .

②
- a) Montrer que FB = CK.
- b) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{CK})$

③
- a) Montrer qu'il existe un déplacement g qui transformant le triangle ABC en le triangle EAK, dont on déterminera ses éléments caractéristiques.
- b) Prouver que DC = BK et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BK})$

④Montrer que les droites (AK) , (BF) et (CD) sont concourante.

☞Exercice 3

Dans le système d'identification des produits par codes barres, un code est une succession de 12 chiffres. Il est précédé d'un treizième chiffre appelé clé de code et qui sert à la vérification de la bonne saisie du code.

6 191234 512347

Un code à barres est symbolisé par le tableau:

R		C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12

6 191234 512347

R est la clé du code et C_1, C_2, . . . , C_{12} sont les chiffres du code.

R, C_1, C_2, . . . , C_{12} sont donc des entiers compris entre 0 et 9.

Les chiffres de rang impair (C_1, C_3, ..., C_{11}) sont dans les cases grisées, ceux de rang pair dans les cases blanches.

La clé R est calculée de telle sorte que la relation suivante soit vérifiée :
$3\times(\text{somme des chiffres de rang impair})+(\text{somme des termes de rang pair})+R \equiv 0[10]$

①Sur l'étiquette imprimée plus haut on a R = 6, C_1 = 1, C_2 = 9 etc.
Vérifier que le code de l'étiquette ne contient pas d'erreur.

②Calculer la clé correspondant au code suivant :

R		5	1	6	0	3	2	4	2	1	5	3	7

③Montrer que les deux codes suivants correspondent à la même clé :

R		c	7	d	0	4	1	5	6	3	6	6	2

R		d	7	c	0	4	1	5	6	3	6	6	2

④Sur l'étiquette ci-dessous, l'un des chiffres a été effacé et remplacé par la lettre a.
Retrouver ce chiffre.

8		3	9	9	4	2	a	2	0	0	3	4	1

⑤Les deux premiers chiffres, b et c, de l'étiquette ci- dessous ont été effacés.

1		b	c	9	3	6	7	3	5	8	0	2	1

Montrer que : $c+3b\equiv -1[10]$.
En déduire les valeurs possibles du couple (b, c).

☞Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0,8]$ par : $f(0)=8$, $f(8)=0$ et pour tout $x\in\left]0,8\right[$,
$f(x)=\sqrt[3]{4-\sqrt[3]{x^2}}$

①Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-8}{x}=-\infty$.

②Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I.

③Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I dans lui-même .

④On note par ζ et ζ' les courbes représentatives des fonctions f et sa fonction réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé.

a) Montrer que la droite Δ d'équation y = x est un axe de symétrie de la courbe ζ.
b) En déduire l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.
c) Déterminer la valeur de $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x-8}$.
d) Tracer les courbes ζ et ζ'

⑤On considère les deux points A(8,0) et B(8,0) et on considère également, la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x)=f(x)+x-8$

a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha\in\left]0,8\right[$ tel que $g'(\alpha)=0$.
b) En déduire que la courbe ζ admet une tangente parallèle à la droite (AB) au point M_α d'abscisse α .
c) Déterminer la valeur de α.

⑥Pour tout entier naturel n, on définit la suite (u_n) par : $0<u_0<8$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=u_n-\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 8$.

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(8 - u_n)$.

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis donner sa limite.

☞Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}dx$

①Calculer u_0 .

②Justifier que $u_0 + u_1 = 1.$. En déduire u_1 .

③Montrer que u est positive et décroissante.

④ a)Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$

b)Calculer alors u_2 .

⑤Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

⑥Soit pour tout entier naturel $n \geq 2$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{(-1)^n e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$

a) Montrer que f_n est la somme de (n-1) termes d'une suite géométrique.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$, où $w_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1 - e^{-k}}{k}$.

Complétez la pyramide suivante:

1
1 1
2 1
1 2 1 1
1 1 1 2 2 1
3 1 2 2 1 1
1 3 1 1 2 2 2 1
……………………………………………

Sujet n°7

☞Exercice1

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une réponse fausse, on pourra donner un contre-exemple.

①le nombre $7^{341}-7$ est-il divisivle par 341 ?

②On donne des suites positives (a_n) et (b_n) tends vers plus l'infini. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln a_n}{\ln b_n}=1$

③Soient u et v deux suites réelles. Si : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n^2+u_n\times v_n+v_n^2\right)=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

☞Exercice 3

On considère , dans le plan orienté, un triangle ABC rectangle en A tel que AC = 2AB et

$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par F le projeté orthogonale de A sur (BC), $I=S_{(AB)}(F)$ et $J=S_{(AC)}(F)$

①

a) Montrer que : $(BI)\perp(AI)$ et $(CJ)\perp(AJ)$.

b) Caractériser l'application : $S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$ et en déduire que A = I*J.

②

Soit S la similitude direct qui transforme B en A et A en C.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que F est le centre de S.

c) Montrer que : $S(I)=J$. En déduire que CJ = IJ.

③Soit σ la similitude indirect qui transforme I en F et F en J.

a) Déterminer le rapport de σ

b) Déterminer Ω le centre de σ. Montrer que $\overrightarrow{\Omega J}=4\overrightarrow{\Omega I}$

c) Soit E le point défini par $\overrightarrow{\Omega E}=2\overrightarrow{\Omega I}$.

Montrer que l'axe (Δ) de σ est la médiatrice de $[EF]$

☞Exercice 2

Soient les points A(1;0;0), B(0;1;1), C(0;-1;-1), D(-1;1;-1) dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

①

a) Calculer l'aire du triangle ABC.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Vérifier que D n'appartient pas au plan (ABC).

②

a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite (Δ) et du plan (ABC).

c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

③Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

④

a) Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P) du segment [DC].

b) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ') d'intersection des plans (P) et (ABC)

☞Exercice 4

①Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f_n(x)=\ln(x)+\frac{x}{n}-1$

a) Dresser le tableau de variations de f_n.

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$

On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle [1 ; e].

c) Etudier le signe de $f_n(x)$ sur $]0,+\infty[$

②Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées (0 ; 1) et le point B_n de coordonnées (n ; 0).

b) Représenter la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

③

a) Vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

b) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

c) Montrer que la suite (α_n) converge. On note alors ℓ sa limite. Calculer la valeur de ℓ.

④On désigne par D_n le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = e$.

a) Calculer l'aire du domaine D_n en fonction de α_n.

b) Etablir que : $(e - \alpha_n)\ln \alpha_n \leq \dfrac{\alpha_n^{\ 2}}{n} \leq (e - \alpha_n)$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n(e-\alpha_n)$.

☞Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan x$.

①Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur R.

②Soit h la fonction réciproque de f. Montrer que h est dérivable sur R et calculer $h'(x)$ pour tout $x\in R$

③Soit ϕ la fonction définie sur $[0,1[$ par : $\phi(x)=h\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Montrer que ϕ est dérivable sur $[0,1[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x\in[0,1[$.

b) En déduire que : $\forall x\in[0,1[,\ \phi(x)=\dfrac{\pi}{4}+h(x)$.

④Soit g la fonction définie sur $[0,1[$ par : $g(x)=h\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-(1+2x)h(x)$.

a) Montrer que g est deux fois dérivable sur $[0,1[$ puis calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

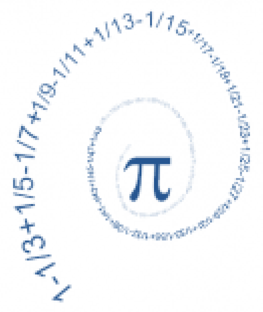
b) Etudier les variations de g' sur $[0,1[$ puis en déduire celles de g.

c) En déduire qu'il existe un unique réel $c\in]0,1[$ tel que $c=\tan\dfrac{\pi}{8c}$

⑤

a) Montrer que l'équation : $h(2-x)=2h(x)$ admet au moins une solution $\alpha\in R$

b) Montrer que α vérifier : $\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+1=0$



Aproximation de

π et $\sqrt{a}$

Calcul approché de π par la méthode d'Archimède

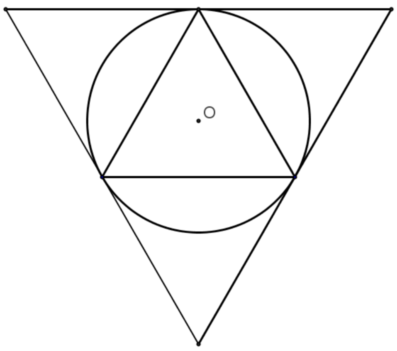
On se propose de déterminer une valeur approchée de π en utilisant la **méthode d'Archimède.**

Le périmètre d'un cercle est majoré par celui de tout polygone régulier circonscrit et minoré par celui de tout polygone régulier inscrit.

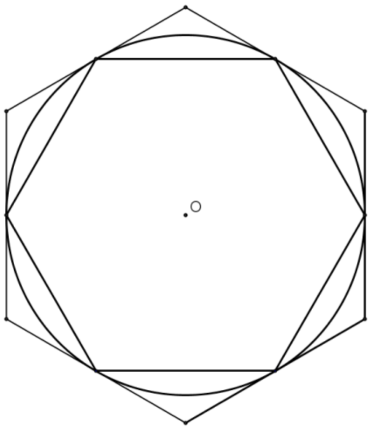
On considère un cercle de rayon 1. Partant des triangles équilatéraux respectivement inscrit et circonscrit, à chaque étape on double le nombre de côtés afin d'obtenir d'abord un hexagone régulier, puis une suite de polygones réguliers à 12 , 24, ..., 3×2^n côtés...

On note a_n (respectivement b_n) le demi périmètre du polygone régulier inscrit (respectivement circonscrit) à 3×2^n côtés avec $n \in \mathbb{N}^*$

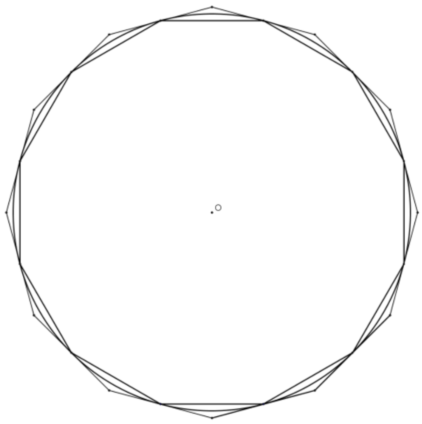
On note A_n les sommets du polygone inscrit et B_n les sommets du polygone circonscrit à 3×2^n côtés.



n=1



n=2



n=3

Résultat préliminaire: pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$.

①Dans le cas où n = 2 (c'est à dire dans le cas de l'hexagone). Préciser la mesure de l'angle $A_k\hat{O}A_{k+1}$? de l'angle $B_k\hat{O}B_{k+1}$?

②Calculer a_1 et b_1. En déduire un premier encadrement de π.

Cas général :

③Exprimer $A_n\hat{O}A_{n+1}$ en fonction de n.

Dans la suite du problème on pose $\theta_n = \dfrac{\pi}{3\times 2^n}$ et $c_n = \cos\theta_n$.

④ a) Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n = 3\times 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^n}\right)$

b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\pi - \dfrac{\pi^3}{9\times 4^n} \le a_n \le \pi$.

⑤Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n = p_{n+1}\times c_{n+1}$.

⑥Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{a_n}{c_n}$.

⑦Montrer que pour tout entier naturel n on a $\dfrac{1}{2} \le c_n \le 1$.

⑧Montrer que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante.

⑨Montrer que :

a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{2a_n}{c_n}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \le b_n - a_n \le \dfrac{\pi^3}{9\times 4^{n-1}}$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n)$.

⑩Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes , convergent vers π.

Déterminer le plus petit entier naturel n pour obtenir une précision à 10^{-6} près de π.

Accélération de la convergence :

On considère la suite définie par $\sigma_n = \dfrac{4a_{n+1} - a_n}{3}$ pour tout entier naturel n ; montrer

que cette suite converge vers π.

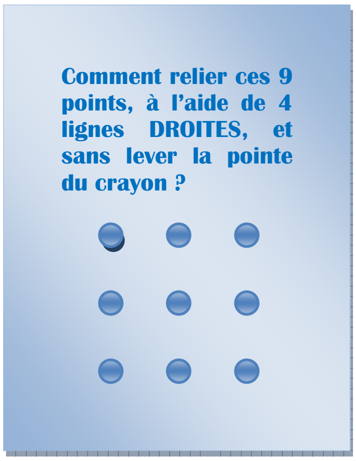
Vérifier que la convergence est plus rapide que celle de la suite (a_n)

$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ldots$

Approximation de $\sqrt{a}$ par la méthode de Héron

On considère les suites (α_n) et (β_n) définies de la manière suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 + E(\sqrt{a}) \\ \alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{2} + \dfrac{a}{2\alpha_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \beta_0 = E(\sqrt{a}) \\ \beta_{n+1} = \dfrac{a}{\alpha_n} \end{cases}$$



①Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\alpha_n > \sqrt{a}$.

②En déduire que, (α_n) est décroissante et (β_n) est croissante.

③Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < \alpha_{n+1} - \beta_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\alpha_n - \beta_n)$.

④En déduire que (α_n) et (β_n) sont adjacentes.

⑤Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\alpha_{n+1} - \sqrt{a} \leq \dfrac{(\alpha_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$

⑥Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$: $h_n = \ln(\alpha_n - \sqrt{a}) - \ln(2\sqrt{a})$

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $h_{n+1} \leq 2h_n$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $h_n \leq 2^n h_0$.

c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\alpha_n - \sqrt{a} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\left(\dfrac{\alpha_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

d) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, trouver un entier naturel $\varphi(k)$ tel que : pour tout $n \geq \varphi(k)$, $\alpha_n - \sqrt{a} \leq 10^{-k}$.

e) Application :

i- Donner la valeur approché de $\sqrt{2}$ à 10^{-10}.

ii- Donner la valeur approché de $\sqrt{7}$ à 10^{-10}.

Trouver le jour de la semaine

Par quel jour de la semaine commencera le cinquième millénaire ? Voilà une angoissante question si le seul moyen dont on dispose pour y répondre consiste à lister tous les jours en partant d'aujourd'hui jusqu'a atteindre le premier janvier 4001. Même dans ce cas, il faut savoir avec précision quelles sont les années bissextiles dans le calendrier qui est le notre, dans lequel il ne suffit pas d'être une année divisible par 4 pour avoir 366 jours.

Si le nombre de jours dans chaque mois (et donc dans l'année) était divisible par 7, il serait très simple de connaitre le jour de la semaine à une date donné : cela ne dépendrait que du numéro du jour dans le mois.

Malheureusement, ce n'est pas le cas : le calendrier est plus compliqué.

La formule qui dit tout

La formule suivante répond en toute généralité à la question de connaitre le jour correspondant à une date donnée. Nous allons détailler son mode d'emploi et les raisons qui font qu'elle fonctionne :

$$j=\left(q+a+\left[\frac{a}{4}\right]-\left[\frac{a}{100}\right]+\left[\frac{a}{400}\right]+\left[\frac{31m}{12}\right]\right)\bmod 7$$

La valeur du nombre j donnée par la formule correspond à un jour de la semaine suivant la règle suivant : 0 = dimanche ; 1 = lundi ; 2 = mardi ; etc.

Elle est déterminer par les nombres q, a et m, mais avant d'expliquer ce que sont ces nombres, il nous faut préciser deux notations.

D'abord un nombre mis entre crochets désigne sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand nombre entier plus petit qui lui. En pratique, pour les nombres positifs, cela revient à tronquer la partie après le virgule dans son expression décimale : par exemple, on a [27,13]=27.

En suite, l'expression « mod7 »(« modulo 7 ») à droite de la formule signifie que l'on considère le reste de la division par 7 de l'expression entre parenthèses. Par exemple, 22mod7 = 1, car 22 divisé par 7 donne 1 pour reste (et 3 pour quotient).

Dans la formule, le nombre q est le plus simple : c'est le quantième (le numéro du jour dans le mois).

Les nombres a et m son un peu moins immédiats ; pour les obtenir à partir de la date considérée, introduisions deux autres quantités : mois, qui désigne le numéro du mois dans l'année (1 pour janvier, 2 pour février, etc.) et année, qui correspond au millésime (le numéro de l'année) avec les chiffres (et pas seulement les deux derniers). Ceux deux dernières valeurs étant connues, on calcule alors a et m, à l'aide d'une valeur c (qui vaut toujours soit 0, soit 1), de la façon suivante : $c=\left[\frac{14-\text{mois}}{12}\right]$; $a=\text{année}-c$

$m=\text{mois}+12c-2$.

Exemple 1 : Date : 15/03/2015

$c=\left[\frac{14-3}{12}\right]=\left[\frac{11}{12}\right]=0$; $a=2015-0=2015$;

$m=3+12\times 0-2=1$, Alors

$$j=\left(15+2015+\left[\frac{2015}{4}\right]-\left[\frac{2015}{100}\right]+\left[\frac{2015}{400}\right]+\left[\frac{31\times 1}{12}\right]\right)\bmod 7$$

$j=(15+2015+503-20+5+2)\bmod 7=2520\bmod 7=0$

c'est Dimanche

Exemple 2 : Date : 19/11/1982

$c=\left[\frac{14-11}{12}\right]=\left[\frac{3}{12}\right]=0$; $a=1982-0=1982$

; $m=11+12\times 0-2=9$; Alors

$$j=\left(19+1982+\left[\frac{1982}{4}\right]-\left[\frac{1982}{100}\right]+\left[\frac{1982}{400}\right]+\left[\frac{31\times 9}{12}\right]\right)\bmod 7$$

$j=(19+1982+495-19+4+23)\bmod 7=2504\bmod 7=5$

c' est vendredi.

Enigmes

☞Enigme n°1

On choisit au hasard une page dans un livre et on fait la moyenne des numéros des pages restantes.

On trouve 265,9.

Déterminer le numéro de la page choisie et le nombre de pages de ce livre.

☞Enigme n°2

J'habite à la campagne, dans une zone en forme de triangle équilatéral délimité par 3 villages. Ma maison se trouve, à vol d'oiseau, à 3 km, 4 km et 5 km des trois villages.

De combien de km, chaque village est-il distant des deux autres ?

☞Enigme n°3

①Deux dactylos qui ont des vitesses de frappe différentes doivent travailler en parallèle pour exécuter un travail.

L'un serait capable de réaliser ce travail, seule, en 4 heures. L'autre le ferait seule en 3heures.

Si elles travaillent en parallèle, en combien de temps effectueront-elles le travail donné ?

②Même question avec 3 secrétaires qui effectueraient le travail en 2,3 et 6h ?

③En avec N dactylos qui effectueraient le travail en $t_1,t_2,\ldots,t_N$?

☞Enigme n°4 (Enigme des Bouddhistes malades)

Dans un camp de bouddhistes, on apprend qu'il y a des malades. Cette maladie n'est pas contagieuse, mais afin de préserver une entière pureté et de ne pas perturber les méditations, un bouddhiste qui se sait malade part.

La maladie se caractérise par des taches sur le front. Le problème est qu'il n'y a aucun moyen pour un bouddhiste de se voir, il n'y a aucun miroir dans tout le camp. Les bouddhistes ont fait le voeux de silence et ne communiquent d'aucune façon, ils ne font que méditer et lire. On sait d'autre part qu'ils se réunissent tous 1 fois par jour au lever du soleil pour une méditation commune de 3 heures (toujours sans parler ni communiquer d'aucune sorte). Au bout de 5 jours, tous les malades sont partis.

Combien y avait il de malades sachant qu'il y avait 53 bouddhistes au départ ?

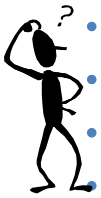
☞Enigme n°5 (La femme au poisson rouge)

Enigme posé par Einstein

Ce qui suit est un problème inventé par Einstein lui-même.

D'après lui, 98 % de la population mondiale n'est pas capable de résoudre (et 99,9 % des femmes ajoute-t-il).

Enoncé :



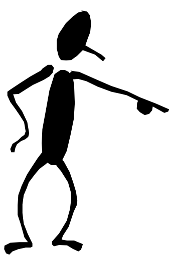
- 5 femmes habitent 5 maisons de couleurs distinctes
- Elles fument des cigarettes de 5 marques différentes
- Boivent 5 boissons distinctes
- Elèvent des animaux de 5 espèces différentes

Question : Qui a des poissons ?

Hypothèses :

- La Norvégienne habite le première maison
- L'Anglaise habite la maison rouge
- La maison verte est située à gauche de la maison blanche
- La Danoise boit du thé
- Celle qui fume des Rothmans habite à coté de celle qui élève les chats
- Celle qui habite la maison jaune fume des Dunhill
- L'Allemande fume des Marlboro
- Celle qui habite la maison du milieu boit du lait
- Celle qui fume des Rothmans a une voisine qui boit de l'eau
- Celle qui fume des Pall Mall élève des oiseaux
- La Suédoise élève des chiens
- La Norvégienne habite à coté de la maison bleue
- Celle qui élève des chevaux habite à coté de la maison jaune
- Celle qui fume des Philip Morris boit de la bière
- Dans la maison verte, on boit du café

Une seule réponse est possible...



Réponse

Enigme 1 : Le livre contient 531 pages et la page choisie a le numéro 319.

Enigme 2 : chaque village est distant de $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$ Km

Enigme 3 : 1°) $t=\frac{12}{7}h$, 2°) $t = 1h$, 3°) $t=\frac{1}{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{t_k}}h$

Enigme 4 : 5 malades

Enigme 5 : La réponse est l'Allemand

Préparation aux olympiades de mathématiques

Concours national de mathématiques 2010

Olympiades internationales de mathématiques 2010

Concours atomath avril 2011 (Niveau $2^{\text{ème}}$ année)

Concours atomath avril 2011 (Niveau $3^{\text{ème}}$ année)

$25^{\text{ème}}$ championnat :Quarts de finale individuel

Concours National de Mathématiques

Session d'avril 2010 Durée : 4heures

Niveau : $3^{\text{ème}}$ année math

☞Exercice n°1

①Montrer que, pour tout réel x strictement positifs, $x+\frac{1}{x}\geq 2$

②Soient $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ des réels positifs tels que $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$.

Montrer que :

$$x_n+\frac{1}{x_1-x_0}+\frac{1}{x_2-x_0}+\frac{1}{x_3-x_2}+...+\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\geq 2n+x_0$$

☞Exercice n°2

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que pour tout entier $n\geq 1$, $u_n{}^2-u_{n+1}\times u_{n-1}=1$.

Montrer qu'il existe un réel k tel que : pour tout entier $n\geq 1$, $u_{n+1}=ku_n-u_{n-1}$.

☞Exercice n°3

Dans un plan orienté, on considère un losange ABCD tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Soit M et N deux points respectivement des segments [BC] et [DC] tels que le centre O du cercle circonscrit au triangle AMN appartient au cercle circonscrit au triangle MCN.

①Montrer que les points O,A et C sont alignées.

②Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})$.

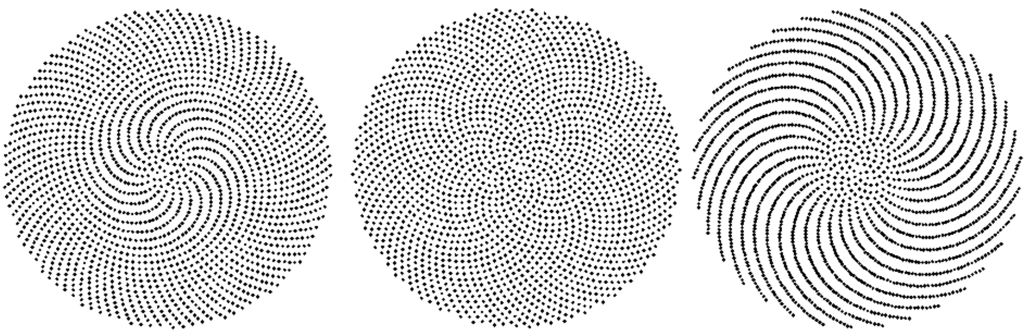
☞Exercice n°4

Soit ABC un triangle tel que : AB =3, AC = 7 et BC = 8.

Montrer que les angles de ce triangle sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

☞Exercice n°5

Montrer que si a,b et c sont trois réels tels que : $abc=1$ et $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, alors l'un au moins de ces réels est égale à 1.



Olympiade International De Mathématiques OIM 2010

Premier jour *Temps accordé : 4heures 30 minutes*

☞Problème n°1

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ telles que, pour tous x, y$\in\mathbb{R}$: $f(\lfloor x\rfloor y)=f(x)\lfloor f(y)\rfloor$.

(On note $\lfloor z\rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à z.)

☞Problème n°2

Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et soit Γ son cercle circonscrit.

La droite (AI) recoupe Γ en D. Soit E un point de l'arc $\overset{\frown}{BDC}$ et F un point du côté [BC] tels que : $B\widehat{A}F=C\widehat{A}E<\frac{1}{2}B\widehat{A}C$.

Soit enfin G le milieu du segment [IF].

Montrer que les droites (DG) et (EI) se coupent en un point de Γ.

☞Problème n°3

ℕ* désigne l'ensemble des entiers strictement positifs.

Déterminer toutes les fonctions $g:\mathbb{N}^*\rightarrow\mathbb{N}^*$ telles que, pour tous $m,n\in\mathbb{N}^*$

$(g(m)+n)(m+g(n))$

Soit un carré parfait.

Deuxième jour *Temps accordé : 4heures 30 minutes*

☞Problème n°4

Soit P un point intérieur au triangle ABC. Les droites (AP), (BP) et (CP) recoupent Γ, cercle circonscrit au triangle ABC, respectivement aux points K, L et M. La tangente en C à Γ coupe la droite (AB) en S. On suppose que SC = SP.

Montrer que MK = ML.

☞Problème n°5

Au début, chacune des six boîtes B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 contient un jeton.

Deux types d'opération sont possibles :

Type 1 : Choisir une boîte non vide B_j avec $1\le j\le 5$; ôter un jeton de la boîte B_j et ajouter deux jetons à la boîte B_{j+1}.

Type 2 : Choisir une boîte non vide B_k avec $1\le k\le 4$; ôter un jeton de la boîte B_k
Et échanger les contenus des boîtes (éventuellement vides) B_{k+1} et B_{k+2}.

Est-il possible, à la suite d'un nombre fini de telles opérations, que les boîtes B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 soient vides et que la boîte B_6 contienne exactement B_j jetons ? (Noter que $a^{b^c}=a^{\left(b^c\right)}$).

☞Problème n°6

Soit $a_1,a_2,a_3,\ldots$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un entier s strictement positif tel que, pour tout n > s, on ait :

$a_n=\max\{a_k+a_{n-k}\ /\ 1\le k\le n-1\}$.

Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs ℓ et N, avec $\ell\le s$, tels que, pour tout $n\ge N$: $a_n=a_\ell+a_{n-\ell}$.

concours atomαth

2ème année

session d'avril 2011

2heures

☞Exercice 1

a un réel strictement positif.

Soit $\sigma = \sqrt{6 + f(a) + 4f(\sqrt{a})} - \sqrt{6 + f(a) - 4f(\sqrt{a})}$ où $f(a) = a + \dfrac{1}{a}$

Justifier l'existence de nombre σ . σ est-il un entier ?

☞Exercice 2

Soit $x = \overline{abc}$ un entier naturel à trois chiffres a, b et c (a non nul) et on note par $\widehat{x}$ l'entier $\overline{cba}$

Exemple : x = 318, a = 3, b=1 et c =8, $\widehat{x} = 813$.

①Montrer que : x est divisible par 11 si et seulement si $x + \widehat{x}$ est divisible par 11

②Déterminer tous les entiers x, sachant que $x + \widehat{x} = 605$.

☞Exercice 3

Montrer que, quels soient les réels a , b , c tel que c >1 : $a^2 + b^2 + \dfrac{c}{2} > a + b$

☞Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x de R : $3f(x) - 2f(f(x)) = x$ et $f(0) = 1$

Soit pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 0$.

Soit pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - u_n$

①Calculer v_0 et v_1 .

②Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, v est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire u_n en fonction de n

☞Exercice 5

On désigne par a , b , c les longueurs respectives des cotes [BC] , [CA] , [AB]d'un triangle ABC et par $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ les mesures en radians des angles de ce triangle.

Soit D le point d'intersection de la bissectrice issue de A et le segment [BC]. La parallèle à (AD) en B coupe (AC) en I.

①Montrer que : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$

②En déduire que $AD = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{\hat{A}}{2}$

NB : Concours Atomαth

Ce concours est ouvert à tous les lecteurs de la revue Atomαth.

Envoyer vos solutions à l'adresse suivante : *akir.cm@gmail.com*

concours atomαth

3éme année

session d'avril 2011

3heures

☞Exercice n°1

①Soit $S(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x-2k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}+\ldots+\frac{1}{x-2n}$. Calculer $S(n)$

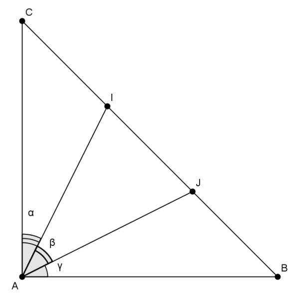
avec $(n,x)\in N^{*}\times R-\{0,2,4,\ldots,2n\}$

②Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E):\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$

☞Exercice n°2

Prouver que : $\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)}=2\sqrt{3}$

☞Exercice n°3



Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A. Soit I et J deux points de [BC] tel que $2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

On note par : $\beta=\widehat{IAJ}$, $\alpha=\widehat{IAC}$ et $\gamma=\widehat{JAB}$.

Calculer $\cos\beta$, $\cos\alpha$, et $\cos\gamma$

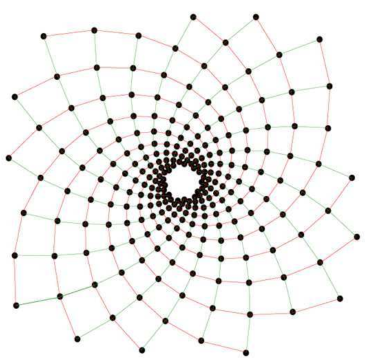
☞Exercice n°4

Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, et D le milieu de [AB]. Soit E le centre de gravité de ACD. Prouver que la droite (CD) est perpendiculaire à (OE) si et seulement si AB = AC.

☞Exercice n°5

Déterminer toutes les fonctions f de classe $C^2(\mathbb{R})$ tel que pour tout x et y de $\mathbb{R}$: $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$

(f de classe $C^2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire f est dérivable sur $\mathbb{R}$, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f'' est continue sur $\mathbb{R}$)



NB : Concours Atomαth
Ce concours est ouvert à tous les lecteurs de la revue Atomαth.
Envoyer vos solutions à l'adresse suivante : *akir.cm@gmail.com*

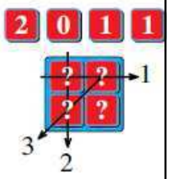
Jeux mathématiques et logiques

25ème championnat Quarts de finale individuel

1 - LES QUATRE JETONS

Mathias dispose de quatre jetons portant les chiffres 2, 0, 1 et 1.

Il les dispose dans une boîte carrée de façon qu'en additionnant les valeurs des jetons d'une ligne, d'une colonne et d'une diagonale, on trouve 1, 2 et 3 comme l'indique le dessin.



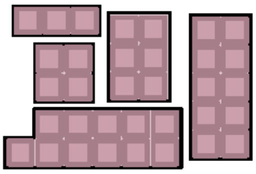
Retrouver la place de chaque jeton.

2 - CHOCOLAT

Mathilde a invité Mathias et Matthieu à goûter.

Elle dispose de cinq morceaux de chocolat de 3 carrés, 4 carrés, 6 carrés, 10 carrés et 11 carrés.

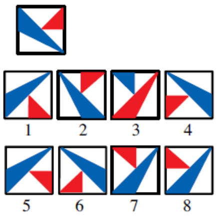
Sans casser aucun morceau, elle donne le même nombre de carrés à Mathias et à Matthieu, et elle mange les carrés restants.



Combien Mathilde a-t-elle mangé de carrés de chocolat?

3 - LE BLASON DE MATHIAS

Mathias a réalisé le blason ci-contre sur une face d'une feuille de carton : Il le tourne d'un demi-tour (le bas se retrouve en haut et le haut en bas), il le fixe sur son armure de chevalier , puis il se regarde dans une glace.



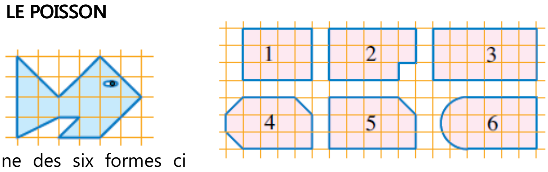
Quel dessin correspond à ce qu'il voit dans la glace ?

4 - PALINDROME

On écrit les dates sous la forme « jjmmaaaa » (par exemple 01092010 pour le 1er septembre 2010). Le 1er février 2010 s'est écrit 01022010. Un tel nombre, qui se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche, est un nombre palindrome.

Quelle sera la prochaine date palindrome ?

5 - LE POISSON



L'une des six formes ci dessus occupe une surface équivalente à celle du poisson.

Laquelle ?

6 - L'ÂGE DE MATHIAS

Mathias a deux sœurs plus jeunes que lui. Le produit des âges des trois enfants est égal à 396 et la somme de ces âges est égale à 23.

Quel est l'âge de Mathias ?

7 - LES TIMBRES

Mathilde dispose dessix timbres représentés ci-contre (3ludos, 3 ludos, 5 ludos, 5 ludos, 9 ludos et 9 ludos).

En utilisant au maximum quatre de ces timbres, elle peut réaliser toutes les sommes de 8 ludos à 26 ludos sauf une. Laquelle ?

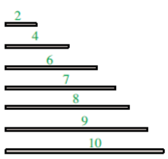
8 - AU MUSÉE

Le père de Garance est gardien au musée de Maths-ville. En 2010, il aura travaillé uniquement les jours dont le numéro (dans le mois) est pair, ainsi que tous les mercredis et tous les samedis.

Combien de jours successifs aura-t-il travaillé, au maximum ?

9 - LES SEPT BAGUETTES

On utilise ces sept baguettes (dont les longueurs en centimètres sont indiquées sur le dessin) en les disposant bout à bout pour dessiner un rectangle.



Quelle est la longueur de ce rectangle ?

10 - LES TRENTE SEGMENTS

Mathilde trace trente segments distincts sur une feuille de papier et on compte le nombre de points qui sont l'extrémité d'au moins un segment.

Combien de points Mathilde trouvera-t-elle, au minimum ?

11 - LES CENT MULTIPLES

Mathilde écrit sur des étiquettes les cent premiers multiples non nuls de 2010 en toutes lettres : deux-mille-dix, quatre-mille-vingt, six-mille-trente, ...

Elle classe ensuite ces étiquettes par ordre alphabétique.

Quelle sera sa première étiquette (on écrira la réponse en chiffres) ?

12 - QUELLE HEURE EST-IL ?

Il est entre 10 h 15 et 10 h 30. Sur la pendule qui fonctionne parfaitement, l'aiguille des heures et celles des minutes sont rigoureusement alignées. **Quelle heure est-il, exactement ?**

On arrondira, si besoin est, à la seconde la plus proche.

13 - BON JEU !

Dans ce cryptarithme, chaque lettre remplace un chiffre de 0 à 9. Deux lettres différentes remplacent toujours deux chiffres différents et aucun nombre ne commence par un zéro.

$$\begin{array}{rr} & 2011 \\ + & BON \\ + & JEU \\ \hline = & MATH \end{array}$$

Combien vaut MATH, au maximum ?

14 - QUI PERD TRIPLE

Anatole, Béatrice et Camille jouent au jeu suivant.

Chacun a devant lui une pile de pièces d'un euro. A chaque tour du jeu, chaque joueur lance un dé de façon à déterminer un perdant du tour (on suppose qu'il y a toujours un perdant). Le perdant doit alors donner des pièces d'un euro à chacun des autres joueurs de façon à tripler la somme que ce joueur avait devant lui. S'il ne peut le faire, la partie s'arrête et les pièces qu'il lui restait sont réparties entre les deux autres joueurs. Exemple :

Anatole	Béatrice	Camille	
150	4	2	Anatole perd
138	12	6	Béatrice perd ; fin de la partie.

A un moment du jeu, Anatole a devant lui 243 euros, Béatrice 81 euros et Camille 3 euros.

Combien de fois chacun des joueurs a-t-il lancé les dés, au maximum ?

15 - HUIT EN DEUX

Julien possède huit jetons numérotés de 1 à 8. Il les répartit en deux tas comportant chacun au moins deux jetons.

Aucun numéro n'est égal à la moyenne des numéros de deux autres jetons du même tas.

Donnez, dans l'ordre croissant, les numéros des jetons du tas qui ne contient pas le 1.

16 - UN HOMME À LA MER

Deux bateaux, l'Albatros et le Bikini, se déplacent sur un plan d'eau à la vitesse de 35 km/h. Ils suivent deux droites différentes qui sont perpendiculaires. Ils se dirigent vers leur point de concours.

L'albatros se trouve à 6,5 km de ce point, et le Bikini à 24 km. Un homme veut plonger de l'Albatros pour nager vers le Bikini à la vitesse de 1,5 km/h.

Dans combien de minutes devra-t-il plonger afin de nager le moins longtemps possible ?

Vous répondrez en arrondissant au plus près et, si nécessaire, vous prendrez $\sqrt{2}$= 99/70.

17 - L'ÂGE DE MATT USALEM

Matt Usalem est un grand-père de plus de 80 ans (mais de moins de 150 ans). Aujourd'hui, il peut dire à ses deux petits enfants, qui ontdes âges différents :

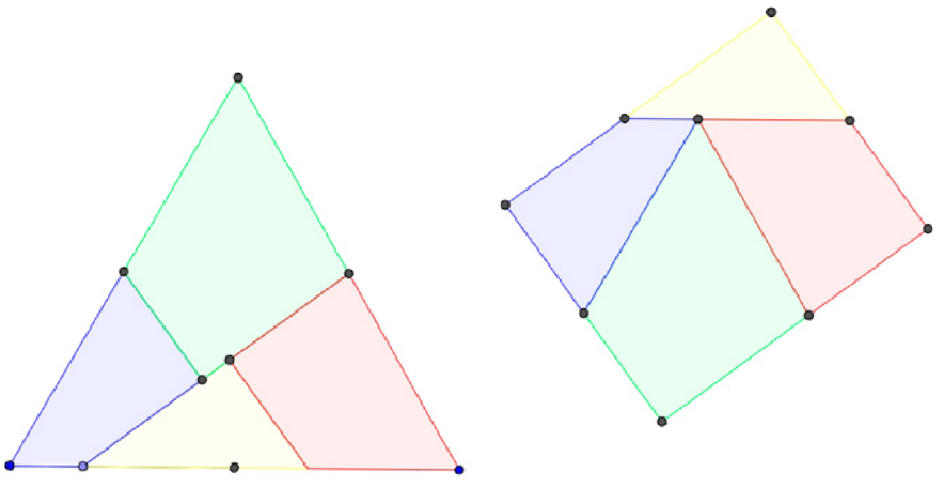
« Le produit de nos trois âges est égal à la somme des carrés de nosâges ». **Quel est l'âge de Matt Usalem ?**

18 - LA FORÊT DE TRIENA

La forêt de Triena est une triangle presqu'équilatéral, dont les côtés ont pour longueurs trois nombres entiers consécutifs de mètres.

Cette forêt est traversée par une route qui suit la hauteur relative au côté moyen du triangle et dont la longueur est également un nombre entier de mètres plus grand que 2010 mètres.

Quelle est, au minimum, l'aire de la forêt exprimée en mètres carrés ?



Pour participer à la revue « Atomαth » et l'enrichir, vous pouvez envoyer votre proposition à l'email : akir.cm@gmail.com sur un fichier Word, compagnie par les renseignements suivants :

Nom, Prénom ,Niveau (élève ou étudiant ou enseignant), nom de lycée.