Matière : Mathématique	**NOMBRES COMPLEXES**	**Professeur** : M. Sylla
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Niveau** : TS1

Exercice 1 :

On désigne un réel appartenant à $[0\ ,\ 2\pi[$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z : $z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)z + 2^{2\theta} = 0$. Donner chaque solution sous forme trigonométrique.

2°) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O , u , v) , on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente . Déterminer θ de manière à ce qu'OAB soit un triangle équilatéral.

Exercice 2 :

Soit $z_1 = \dfrac{z^2}{z+1}$ et $z_2 = \dfrac{1}{z(z+1)}$.

Déterminer z tel que z_1 et z_2 soient tous les deux réels . Dans ce cas , calculer z_1 et z_2

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel et θ un réel appartenant à $]0\ ,\ \pi\ [$. On considère les sommes :

$$S_n = \cos^2\theta + \cos^2\theta\cos 2\theta + \ldots\ldots + \cos^p\theta\cos p\theta + \ldots.. + \cos^n\theta\cos n\theta$$

$$S'_n = \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin 2\theta + \ldots\ldots + \cos^p\theta\sin p\theta + \ldots.. + \cos^n\theta\sin n\theta$$

$\Sigma_n = S_n + iS'_n$

1) Montrer que Σ_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe .

2) Déduisez-en la valeur de Σ_n , puis de S_n et S'_n en fonction de n et θ .

3) a) Calculer la somme $S_n = \sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + -\ldots - \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}$

avec $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Quelle est la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 4 :

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O , u , v) .

1°) Soit M_1 , M_2 , M_3 les points d'affixes z_1 , z_2 , z_3

Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si , et seulement si , $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$

où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (on pourra utiliser une rotation centrée en M_2) .

2°) On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) suivante :

$z^3 - (1 + a + ia)z^2 + a(1 + i + ia)z - ia^2 = 0$ où a désigne un paramètre complexe .

a°) Vérifier que 1 est solution de (E) . Calculer les deux autres solutions z' et z'' de (E) .

b°) Soit A , B , C les points d'affixes respectives 1 , z' et z'' .

Déterminer les deux valeurs complexes de a pour lesquelles le triangle ABC est équilatéral.

On exprimera chaque valeur sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

Exercice 5 :

1) Soit $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$. Soit $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

a) Démontrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive .

b) Calculer S + T , ST , S et T .

2) Pour a et b réels fixés, soit l'équation :

$z^4 - 4(\cos a \cos b)z^3 + 2(1 + \cos 2a + \cos 2b)z^2 - 4(\cos a \cos b)z + 1 = 0$

a) On pose $u = z + 1/z$.

Démontrer que la résolution revient à celle d'un système de deux équations du second degré .

b) Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$. Préciser en fonction de a et b , la forme trigonométrique des solutions . Les représenter dans le plan complexe.

Exercice 6 :

On pose $Q(z) = z^3 - (i + 2i\cos\alpha)z^2 - (1+\cos\alpha)^2 z + i(1+\cos^2\alpha)$ où z désigne un nombre complexe , i l'unité imaginaire pure , α un nombre réel tel que $0 \prec \alpha \prec \frac{\pi}{2}$. Les trois racines de Q(z) sont désignés par a , b et c respectivement . On veut déterminer les racines de Q(z) de deux façons différentes.

1ère façon

1°) Sans calculer a , b et c , calculer (a + b + c) , (ab + ac + bc) et abc .

2°) Sachant que la somme de deux de ces racines est égale à (2i cos α) , utiliser les résultats précédents pour résoudre l'équation Q(z) = 0 .

2ème façon

3°) Montrer que Q(z) a une racine imaginaire pure que l'on déterminera.

4°) En déduire les autres racines de Q(z) .

5°) a étant la racine de Q(z) dont la partie réelle est positive, donner son module en fonction de α et déterminer le sinus et le cosinus de son argument en fonction de α .

Exercice 7 :

Soit n un entier naturel non nul et soit q un nombre réel différent de 0 , -1 et 1 .

On considère dans le plan complexe les n points A_0 , A_1 , ………., A_{n-1} d'affixes respectives z_0 , z_1 ,………….., z_{n-1} .

1°) Démontrer que le système de n points pondérés $\{(A_k, q^k), 0 \le k \le n-1\}$ admet un barycentre G_n .

2°) On choisit les nombres complexes z_k de la façon suivante :

$z_0 = 1$, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ et $z_k = (z_1)^k$ pour $1 \le k \le n-1$.

a°) Déterminer l'affixe z_n de G_n à l'aide de q et de z_1 .

b°) Préciser la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n de z_n .

3°) a°) Déterminer n pour que z_n soit un nombre réel .

b°) Calculer les limites de x_n et de y_n lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O , u , v) de sens direct .

Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' . Démontrer :

1°) $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si , et seulement si , $\bar{z}z'$ est imaginaire pur .

2°) O , M , M' sont alignés si , et seulement si , $\bar{z}z'$ est réel .

3°) Une mesure de $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ est $\pi/2$ si , et seulement si , $z' = \lambda zi$, $\lambda \in IR^{*}+$

Exercice 9 :

Soient α et β deux nombres complexes quelconques. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et pour tout complexe z :

$$f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z.$$

1) Montrer que $f(1) + f(j) + f(j^2) = 3$. (On rappelle que : $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$).

a) En déduire que $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$.

b) En utilisant a), montrer que l'un au moins réels $|f(1)|$, $|f(j)|$ et $|f(j^2)|$ est supérieur ou égal à 1.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité O et tel que l'affixe de A soit un réel r strictement positif fixé. I et J sont deux points quelconques du plan d'affixes respectives a et b.

Dans cette question on prend $\alpha = -(\frac{a+b}{r})$ et $\beta = \frac{ab}{r^2}$.

a) Montrer que les affixes de B et C sont rj et rj^2.

b) Montrer que $BO \cdot BI \cdot BJ = r^3|f(j)|$.
Calculer de la même façon $CO \cdot CI \cdot CJ$ et $AO \cdot AI \cdot AJ$.

c) Montrer le triangle ABC a au moins un sommet S vérifiant : $SO \cdot SI \cdot SJ \geq r^3$.

Exercice 10 :

Pour tout entier naturel k, on pose $z_k = \frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i}$

et on note $|z_k| = \rho_k$ et $\arg z_k = \alpha_k$ où $\alpha_k \in]-\pi, \pi]$.

Partie I :

1) Montrer que pour tout $k > 0$, $\rho_k = 1$ et $tan\frac{\alpha_k}{2} = \frac{1}{1+k(k+1)}$.
2) Placer dans le plan complexe les points d'affixes z_0, z_1 et z_2.
3) a) Démontrer que pour tout entier $k \geq 0$, il existe un unique réel θ_k de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, tel que $tan\,\theta_k = k$. Calculer θ_0 et θ_1.
   b) Sans calculer θ_2 et θ_3, construire sur le cercle trigonométrique les points images de $e^{i\theta_2}$ et $e^{i\theta_3}$ en précisant le procédé de construction utilisé.
   c) Démontrer que pour tout entier $k \geq 0$: $\frac{\alpha_k}{2} = \theta_{k+1} - \theta_k$.

Partie II :

On pose : $S_1 = z_1$, $S_2 = z_1 \cdot z_2$, $S_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ et pour tout entier $n \geq 4$, $S_n = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots z_n$.

1) Quel est le module de S_n ?
   Exprimer l'argument de S_n en fonction de θ_{n+1} et θ_1.
2) Par définition une suite de nombres complexes $(r_n e^{i\varphi_n})$ converge vers le nombre complexe $re^{i\varphi}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = \varphi$.
   Montrer que la suite (S_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 11 :

On considère la suite (z_n) de nombres complexes telle que $z_0 = 0$, $z_1 = i$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2}) \qquad (1).$$

1) a) On pose $v_n = z_n - z_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. Exprimer v_n en fonction de n.
   b) En déduire que $z_n = \frac{1-i}{2}(i^n - 1)$.
   c) Démontrer que la suite (z_n) est périodique.
2) On note M_n l'image dans le plan complexe du nombre complexe z_n.
   a) Marquer les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
   b) Que peut-on dire des points M_{100}, M_{101}, M_{102} et M_{103} ?
   c) Interpréter en module et argument la relation (1) pour déterminer la nature du quadrilatère $M_nM_{n+1}M_{n+2}M_{n+3}$.

Exercice 12 :

Θ est réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$ et n un entier naturel. Donner le module et un argument de $\left(\frac{1+cos\theta-isin\theta}{1-cos\theta-isin\theta}\right)^n$

Exercice 13 :

Le but de l'exercice est de montrer, à l'aide des nombres complexes, qu'un triangle dans lequel le centre O du cercle circonscrit est aussi isobarycentre est un triangle équilatéral.

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1)a) Mettre ω et ω^2 sous forme algébrique.

b) Montrer que $1 + \omega + \omega^2 = 0$ et que $\omega^2 = \varpi$.

2) On cherche les nombres complexes z tels que : $|z| = |1 + z| = 1$ $(*)$.

a) Montrer que ω satisfait aux conditions $(*)$.

b) Montrer que si un nombre complexe $z = x + iy$ vérifie les conditions $(*)$ alors $x = -\frac{1}{2}$.

En déduire que ω et ϖ sont les seuls complexes satisfaisant aux conditions$(*)$.

3) Soient A, B et C, d'affixes respectives a, b et c, trois points du cercle (Γ) de centre O et de rayon R.

On suppose que O est l'isobarycentre des points A, B et C. On pose $p = \frac{b}{a}$ et $q = \frac{c}{a}$.

a) Montrer que $|p| = |q| = 1$ $et\ que$ $1 + p = -q$.

b) Montrer, à l'aide de 2.b) que $p = \omega$ ou $p = \varpi$.

Dans ce qui suit, on suppose que $p = \omega$.

c) Montrer, à l'aide de 1), que $q = \omega^2$.

d) Montrer que $b - a = (\omega - 1)a$; $c - b = (\omega - 1)b$; $c - a = (\varpi - 1)a$.

En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 14 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit les points A et B d'affixes respectives 1 et – 1.

A tout point M d'affixe z du plan, on lui associe le point M' d'affixe z' avec zz'= 1 .

1) a) Construire M et M' lorsque $z = 2(1 + i)$

b) Dans le cas général, montrer que la droite (AB) est bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OM'}\right)$ et que OM.OM'$= OA^2$.

2) a) Vérifier que pour tout z∈ $\mathbb{C}^*$, on a :

$$\left(\frac{z+z'}{2}-1\right)\left(\frac{z+z'}{2}+1\right)=\left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$$

b) Soit I le milieu de $[M\ ;M']$. En utilisant 2.a), montrer que :

IA.IB = IM^2 et que, pour M$\neq A$ et M$\neq B$, la droite (MM') est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})$.

PROBLEME :

1) a) α est un réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E , 1) : $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$

b) En déduire la forme trigonométrique des solution de l'équation (E , n) : $z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0$, n étant un entier naturel non nul.

2) On pose $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1$ avec n un entier naturel non nul et α un réel. On admet que

$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right]$.

a) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que : $\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$

b) Pour tout $\alpha \in]0\ ;\pi[$ et pour tout naturel supérieur ou égal à 2, on pose : $H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)$.

Montrer que : $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$

c) Quelle est la limite de : $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

d) En déduire que ,

pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a : $\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \ \ldots\ \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

.