Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Matière : Mathématique	**LN EXPO**	**Professeur** : M. DiamBa
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Niveau** : TS1

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$\boldsymbol{a})\ \ln(x^4+4) = 2\ln(-x\sqrt{5})$ $\quad \boldsymbol{b})\ \ln(\sqrt{2x-3}) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$

$\boldsymbol{c})\ \ln^2 x = \ln x^2$ $\quad \boldsymbol{d})\ (x^2-1)\ln x = 0$ $\quad \boldsymbol{e})\ \ln|x^3-x^2| = \ln|x-1| + \ln|20-x|$

$\boldsymbol{f})\ \dfrac{\ln|x-3|}{\ln|2x+1|} = \dfrac{\ln|2x+1|}{\ln|x-3|}$ $\quad \boldsymbol{g})\ \ln[\ln(x-1)(x^2-x-1)] = \ln[\ln(8x+1)]$

$\boldsymbol{h})\ \ln^3 x - 4\ln^2 x + \ln x + 6 = 0$ $\quad \boldsymbol{i})\ \ln(x+3) > \ln(x^2+2x-3) - \ln x$

$\boldsymbol{j})\ \ln\left(\dfrac{2x-3}{5x+1}\right) \leq \mathbf{0}$ $\quad \boldsymbol{k})\ \ln x + \dfrac{1}{\ln x} < \dfrac{3}{2}$ $\quad \boldsymbol{l})\ 2\ln^2 2x - 5\ln 2x + 3 \leq 0$

$\boldsymbol{m})\ x\ln|x| < 0$ $\quad \boldsymbol{n})\ \ln(x-mx) + m = 0$ $\quad \boldsymbol{o})\ \log_2 x \times \log_3 x = 3$

$\boldsymbol{p})\ \log(x^2-1) + \log 4 = \log(4x-1)$ $\quad \boldsymbol{q})\ \log_a x = \log_x a \ \ (a > 0\ et\ a \neq 1)$

$\boldsymbol{r})\ 2\ln(x+m) = \ln(2m-3x)$ $\ (\boldsymbol{discuter\ suivant\ m})$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$a)\ e^{\sqrt{x+1}} = e^{x-1}$ $\quad b)\ 8^{3x} = 4$ $\quad c)\ e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0$ $\quad d)\ e^{2x} - 5e^x - 6 = 0$

$e)\ 3^{x+2} + 9^{x+1} - 1458 = 0$ $\quad f)\ 8^{6x} - 3.8^{3x} - 4 = 0$ $\quad g)\ 2^{x+1} = 3^x$ $\quad h)\ 5^x = 2^{x^3}$

$i)\ x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$ $\quad j)\ x^{x^2} = (x^2)^x$ $\quad k)\ \ln(e^{x^2-1} - e^{1-x^2}) > \dfrac{2}{5}$ $\quad (poser\ X = e^{x^2-1})$

$l)\ (m+1)2^x + (m-1)2^{-x} = 0$ $\qquad (dicuter\ suivant\ m)$

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

$\boldsymbol{a})\ \begin{cases} x+y = 13 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{b})\ \begin{cases} x^2+y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{c})\ \begin{cases} 2\ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \\ \ln(x-2) + 3\ln(y-1) = 9 \end{cases}$

$\boldsymbol{d})\begin{cases} \ln x^4 + \ln y^5 = 32 \\ \ln x^6 - \ln y^7 = -39 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{e})\ \begin{cases} \ln x \,.\, \ln\left(\dfrac{x}{2y}\right) = 7 \\ \ln x - \ln y = 4 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{f})\ \begin{cases} \ln\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right) = 9 \\ \ln(xy^5) = -\dfrac{17}{2} \end{cases}$ $\quad g)\ \begin{cases} 2^{x+y} = 4 \\ 2^x + 2^y = \sqrt{18} \end{cases}$

$$h)\ \begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \qquad i)\ \begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Soit l'équation d'inconnue $x \geq 0$: $2^x + 3^x + 4^x = 5^x$.

1.) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1.$$

2.) En déduire que l'équation proposée admet une unique solution α positive.

3.) Résoudre l'équation $x^{1/4} + 2x^{5/3} - 3 = 0$.

Exercice 5 :

Calculer les limites suivantes :

$$\boldsymbol{a})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \quad \boldsymbol{b})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} \quad \boldsymbol{c})\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x+3) - \ln(x-5)$$

$$\boldsymbol{d})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+3)}{\ln(x-5)} \quad \boldsymbol{e})\ \lim_{x\to0} \ln x \ln(x+1) \quad \boldsymbol{f})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x - 2}{2\ln x - 3}$$

$$\boldsymbol{g})\ \lim_{x\to1} \frac{\ln(x^2-x+1)}{x-1} \quad \boldsymbol{h})\ \lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \quad \boldsymbol{i})\ \lim_{x\to2} (x-2)\ln\frac{x+1}{(x-2)^2}$$

$$\boldsymbol{j})\ \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+kx)}{x}\ (k \neq 0) \quad \boldsymbol{k})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad l)\ \lim_{x\to0} \sqrt{x}\ln x \quad \boldsymbol{m})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\boldsymbol{n})\ \lim_{x\to0} \sqrt{x}\ln^3 x \quad \boldsymbol{o})\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \ln x^6 \quad \boldsymbol{p})\ \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad \boldsymbol{q})\ \lim_{x\to0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$$

Exercice 6 :

Calculer les limites suivantes :

$$\boldsymbol{a})\ \lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x \quad \boldsymbol{b})\ \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - e^x \quad \boldsymbol{c})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{x}} \quad \boldsymbol{d})\ \lim_{x\to-\infty} x^2 e^x \quad \boldsymbol{e})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt[4]{x}}$$

$$\boldsymbol{f})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{5e^x - 1}{3e^x + 2} \quad \boldsymbol{g})\ \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} \quad \boldsymbol{h})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{\ln(x^3+1)}$$

$$\boldsymbol{i})\ \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{1+x}} - e^{\frac{1}{x}}\right) \quad \boldsymbol{j})\ \lim_{x\to2} \frac{x^2 - 2^x}{x^x - 2^2} \quad \boldsymbol{k})\ \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad \boldsymbol{l})\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\boldsymbol{m})\ \lim_{x\to+\infty} (a^x + b^x)^{1/x}\ (a > 0, b > 0) \qquad \boldsymbol{n})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{3^x}$$

Exercice 7 :

1.) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer un intervalle sur lequel la fonction est continue et en donner une primitive sur cet intervalle :

$\boldsymbol{a})\ f(x) = \sin 2x\,.\,e^{\cos^2 x}$ $\boldsymbol{b})\ f(x) = 3^{-2x+1}$ $\boldsymbol{c})\ f(x) = \frac{1}{\cos x}$ $\boldsymbol{d})\ f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$

$\boldsymbol{e})\ f(x) = \dfrac{\sin a}{\cos^2 x} e^{\tan x}\ \ (\sin a \neq 0)$ $\boldsymbol{f})\ f(x) = \dfrac{1+e^{2x}}{2x+e^{2x}}$

2.) Déterminer les réels α et β annulant le dénominateur et décomposer *f(x)* sous la forme $f(x) = a + \frac{b}{x-\alpha} + \frac{c}{x-\beta}$ puis en déduire une primitive de *f*.

$\boldsymbol{a})\ f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ $\boldsymbol{b})\ f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x}$ $\boldsymbol{c})\ f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+x-12}$

Exercice 8 :

Etudier et représenter graphiquement la fonction *f*.

$\boldsymbol{a})\ f(x) = x - \ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ $\boldsymbol{b})\ f(x) = \dfrac{1+\ln^2 x}{1-\ln^2 x}$ $\boldsymbol{c})\ f(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

$\boldsymbol{d})f(x) = \ln(\ln x)$ $\boldsymbol{e})\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + x$ $\boldsymbol{f})\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$\boldsymbol{g})\ f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ $\boldsymbol{h})\ f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\boldsymbol{i})\ f(x) = \dfrac{x}{1+e^{-x}}$

$\boldsymbol{k})\ f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right)$ $\boldsymbol{j})\ f(x) = x - \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)$

Exercice 9 :

Soit la fonction *f* définie par $\begin{cases} f(x) = \left|\frac{x-1}{x}\right|^{1/\sqrt{2}} & si\ \ x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

1.) Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* en 1.

2.) Etudier *f* et tracer sa courbe représentative.

Exercice 10 :

1.) Soit f un polynôme de degré $n \geq 0$: $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_0 \neq 0)$.
Montrer que $x^{-n} f(x)$ a une limite non nulle en +∞.

2.) On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q tels que, pour tout *x* >0, $\ln x = \frac{P(x)}{Q(x)}$. On note d°P = p et d°Q = q.

a-) Montrer que $x^{q-p} \ln x$ admet alors une limite non nulle en +∞.

b-) En comparant avec les résultats sur $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \ln x = +\infty$ (α réel), en déduire que ln n'est pas une fonction rationnelle.

Exercice 11 :

1.) a-) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

b-) Soit $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)e^{-x}$. Etudier f et tracer sa courbe (C_f).

2.) a-) Soit $g_m : x \mapsto (x^2 + mx + 1)e^{-x}$, de courbe (C_m) ; m paramètre réel. Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

b-) Etudier la position relative de (C_m) et (C_f) suivant les valeurs de m.

c-) Montrer que pour tout $m \neq 0$, g_m admet deux extrema en $x_1 = 1$ et $x_2 = 1 - m$.

d-) Montrer que quand m varie dans $\mathbb{R}^*$, les points de coordonnées $(1 - m, g_m(1 - m))$ appartiennent à une courbe dont on précisera l'équation.

Exercice 12 :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $f_a(x) = \ln(1 + ax)$. On note (C_a) la courbe de f_a.

1.) Indiquer le domaine de définition D_a de f_a selon les valeurs de a.

2.) a-) Quelle est la transformation transformant (C_a) en (C_{-a}) ?

b-) Soit (Γ) la courbe de ln. Démontrer que lorsque $a > 0$, (C_a) est l'image de (Γ) par la translation de vecteur $\vec{u} = -\frac{1}{a}\vec{\imath} + \ln a\,\vec{\jmath}$.

3.) Etudier les variations de f_a selon les valeurs de a.

4.) Montrer que toutes les courbes (C_a) passent par un point fixe O. Donner une équation de la tangente en O à (C_a).

5.) Tracer dans un même repère $(C_{1/2})$ et (C_1).

Exercice 13 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 1$ et (V_n) la suite définie par $V_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$, $\forall\, n \geq 1$.

1.) Calculer U_1, U_2, U_3, V_1, V_2 et V_3.

2.) A l'aide des accroissements finis, démontrer que : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n + 1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.

3.) En déduire que : $\forall\, n \geq 1,\ U_n \geq \ln(n + 1)$. Quelle est la limite de (U_n) ?

4.) Montrer que : $\forall\, x \in]0, 1[,\ \ln(1 + x) < x < -\ln(1 - x)$.

5.) Montrer que : $\forall\, n \geq 2,\ \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) < V_n < \ln\left(2 + \frac{2}{n-1}\right)$.

6.) En déduire la limite de la suite (V_n).

Exercice 14 :

On considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = mx - 1 - \ln x$, où m est un paramètre réel strictement positif.

1.) Etudier les variations de f_m.

2.) Démontrer que : $\forall\, x > 0,\ \ln x \leq x - 1.$ [2]

3.) On donne un entier naturel $n \geq 2$ et n nombres strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$. On note M la moyenne arithmétique de ces nombres, G = $\sqrt[n]{a_1 \times\ a_2 \times \dots \times a_n}$ la moyenne géométrique et H la moyenne harmonique, à savoir $\frac{n}{H} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$.

a-) Démontrer que G ≤ M (on pourra appliquer [2] avec $x = \frac{a_i}{M}$).

b-) Comparer G et H.