Matière : Mathématique	**Isométrie – similitudes planes**	**Professeur** : M. Sylla
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Niveau** : TS1

Exercice 1 :

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-dessous.

1) Soit L le centre du carré ABFE et J le milieu de $[AL]$. Soit f la similitude directe du plan (ABF) telle que $f(A) = L$ et $f(B) = J$.
   a) Déterminer l'angle et le rapport de f.
   b) Construire $E' = f(E)$. Montrer que $f(F)$ est le milieu du segment $[AB]$.
   c) Soit Ω le centre de la similitude f. Montrer que Ω, A ; L et E d'une part et les points Ω, A, B et J d'autre part sont cocycliques. En déduire une construction de Ω.
   d) Montrer que les droites (ΩA) et (ΩE) sont orthogonales.
2) On désigne par I le milieu du segment $[FG]$ et toujours L le centre du carré ABFE.
   a) Vérifier que $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{IH} \wedge \overrightarrow{IB}$.En déduire l'aire du triangle IHB.
   b) Calculer le volume du tétraèdre BCIH et en déduire la distance du point C au plan BIH.

Exercice 2 :

On considère la suite (z_n) de nombres complexes telle que $z_0 = 0,\ z_1 = i$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2}) \qquad (1).$$

1) a) On pose $v_n = z_n - z_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. Exprimer v_n en fonction de n.
   b) En déduire que $z_n = \frac{1-i}{2}(i^n - 1)$.
   c) Démontrer que la suite (z_n) est périodique.
2) On note M_n l'image dans le plan complexe du nombre complexe z_n.
   a) Marquer les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
   b) Que peut-on dire des points M_{100}, M_{101}, M_{102} et M_{103} ?
   c) Interpréter en module et argument la relation (1) pour déterminer la nature du quadrilatère $M_nM_{n+1}M_{n+2}M_{n+3}$.

Exercice 3 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en B tel que $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $BC=2BA$. Pour tout point M de (BC), soit M' le point du plan tel que le triangle AMM' soit rectangle et isocèle et vérifie $\left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe plane s de centre A telle que $s(M)=M'$.
2) Quel est l'ensemble E des points M' lorsque M décrit la droite (BC) ?
3) Soit I le milieu de $[MM']$.
   a) Calculer le rapport $\frac{AI}{AM}$ et montrer que l'angle $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AI}\right)$ est indépendant de M.
   b) Quelle est la nature de l'ensemble F des points I lorsque M décrit le cercle de centre A et de rayon AB ? (on fera un dessin où seront représentés les ensembles E et F).

Exercice 4 :

Le plan étant orienté, on considère un triangle ABD rectangle et isocèle tel que $AB=AD=a$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) a) Faire une figure pour $a=6\ cm$.
   On note I le milieu de $[BD]$.
   Soit E un point de la demi-droite $[AB)$, k un réel non nul tel que $\overrightarrow{EB}=k\overrightarrow{AB}$ et F le point défini par $\overrightarrow{FD}=-k\overrightarrow{AD}$.
   b) Déterminer une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}}\right)$.
   c) Justifier qu'il existe une rotation r qui transforme B en D et E en F ; préciser l'angle de cette rotation.

2) Soit Ω le centre de la rotation r.
   a) Montrer que AB ΩD est un carré.
   b) Soit J le milieu de $[EF]$.
   Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s de centre Ωqui transforme E en J.
   c) Déterminer l'ensemble (Δ) des points J lorsque E décrit la demi-droite $[AB)$; représenter (Δ).

Exercice 5 :

Dans un plan orienté, on considère un carré direct MNPQ de centre O.

Soit I un point de $[NP]$ distinct de N.

On note J le point d'intersection de (MI) et de (PQ). La perpendiculaire (Δ) à (MI) passant par M coupe (NP) en K et (PQ) en L

1) Faire une figure avec $NP = 5\ cm$; $NI = 2\ cm$. (On placera (NP) « verticalement » c'est-à-dire parallèlement au grand côté de la feuille).
2) Soit R le quart de tour direct de centre M.
   a) Préciser l'image de la droite (NP) par R.
   b) Déterminer les images de K et I par R.
   c) Quelle est la nature des triangles KMJ et IML.
3) On note E le milieu du segment $[IL]$, F celui de $[JK]$; soit s la similitude directe de centre M d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a) Préciser les images de K et I par s.
   b) Quel est le lieu géométrique du point E quand I décrit $[NP]$ privé de N.
   c) Déduire de ce qui précède que les points O, N, E et Q sont alignés.

Exercice 6 :

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD tel que $AB = 3$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I le symétrique de A par rapport à D. Soit S la similitude plane directe telle que $S(A) = C$ et $S(B) = A$.

1) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S.
2) On désigne par Ω le centre de S et par G le barycentre de $(B, 4)$ et $(C, -1)$.
   a) Montrer que Ω, A, I et C appartiennent à un même cercle (C_1).
   b) Montrer que $\Omega C = k^2 \Omega B$ et en déduire que Ω appartient aussi à un cercle (C_2) de centre G dont on donnera le rayon.
   c) Montrer que (C_1) et (C_2) sont tangents en Ω. Construire Ω.

Exercice 7 :

Le plan (P) étant orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On note O l'intersection des bissectrices intérieures de ABC. Soit s_1 la similitude plane directe de centre A qui transforme B en O et s_2 la similitude plane directe de centre C qui transforme O en B. A tout point M du plan distinct de A et de B, on associe le point $N = s_1(M)$ et le point $P = {s_2}^{-1}(M)$.

1) a) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})$.
   b) On désigne par s' la similitude plane directe de centre A qui transforme B en M. Montrer que $s' \circ s_1 = s_1 \circ s'$; en déduire l'image de O par s'.
   Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})$.
   c) Proposer une construction géométrique de N, lorsque le point M est donné.

2) a) Quelle est la nature de $r = s_1 \circ s_2$? Préciser ses éléments géométriques caractéristiques.
   b) Déterminer $r(P)$ et en déduire une construction géométrique de P à partir de N.
   c) Lorsque $M = O$, montrer que le point N appartient à la demi-droite $[AC)$ et le point P à la demi-droite $[CA)$.
3) Faire une figure comportant les points A, B, C, O, P et N avec $M = O$.

Exercice 8 :

Le plan est orienté, PQR est un triangle équilatéral de sens direct du plan. I et J sont les milieux respectifs de $[QR]$ et $[RP]$. Q_1 est le symétrique de Q par rapport à J.

1) Soit t la translation transformant J en Q et r la rotation de centre P transformant Q en R. On pose $f = t \circ r$.
   a) Faire une figure. Définir et construire les points P’ et Q’ images respectives par f des points P et Q
   b) Déterminer la nature du triangle JIR et préciser l’image par f du point R.
   c) Donner la nature et les éléments géométriques caractéristiques.
   En déduire la nature du triangle IPP’.
2) Soit s la similitude directe telle que $s(J) = P$ et $s(R) = I$.
   a) Déterminer l’angle et le rapport de s. Montrer que $s(I) = P'$.
   b) Soit Ω le centre de s. Montrer que les points Ω, I, R et P d’une part et les points Ω, P, J et Q_1 sont cocycliques.
   En déduire la position de Ω puis construire ce point.

Exercice 9 :

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. Sur la figure, on prendra 8 cm comme la longueur du segment $[AB]$.

1) Etudier et construire l’ensemble E des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 4$.
2) Etudier et construire l’ensemble F des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
3) Soit C l’mage de B par la rotation de centre A et d’angle $\frac{3\pi}{4}$ et D l’image de B par l’homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$. On désigne par s la similitude directe qui transforme A en B et C en D.
   a) Déterminer le rapport et l’angle de s.
   b) On note I le centre de la similitudes. Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l’angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$. En déduire la positon du point I et le placer sur la figure.

c) Démontrer que le point I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD.

Exercice 10 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

On appelle R la rotation de centre A qui transforme B en C et T la translation de $\overrightarrow{AB}$.

On note I le milieu du segment [BC].

1) Construire $J = R(I)$.
2) On pose $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$.
   Déterminer $F_1(J)$ et $F_2(I)$ puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de F_1 et de F_2.
3) Soit M un point du plan, M_1 son image par F_1 et M_2 l' image de M par F_2.
   Quelle est la nature du quadrilatère BCM_1M_2 ?

Exercice 11 :

On considère un triangle ABC direct.

On appelle I, J, K les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB].

Soit N l'image de C par la rotation de centre J et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$ et P l'image de A par la rotation de centre K et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $KP = IJ$.
2) On appelle r la rotation qui transforme K en P et P en I.
   Quelle est une mesure de l'angle de cette rotation ?
3) Démontrer que les triangles IJN et IKP sont isométriques.
   En déduire l'mage de I par r et que le triangle PIN est isocèle et rectangle en I.
4) On appelle r_1 la rotation de centre N et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre P et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'image de B par $r_1 \circ r_2$.
   Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r_1 \circ r_2$.