

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Matière : Mathématique	Géo espace	Professeur : M. Sylla
Groupe Excellence (cours en ligne)		Niveau : TS1

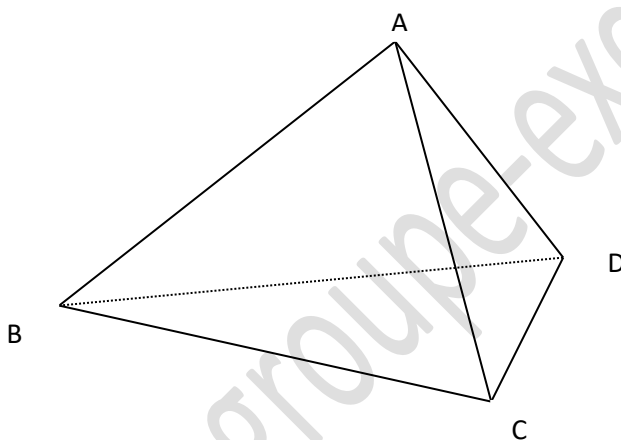
Exercice 1 :

Tétraèdre régulier

Un tétraèdre est une figure géométrique qui a 4 faces.

- les intersections des faces sont appelées les arêtes du tétraèdre : on en a 6 .
- Si les 6 arêtes ont toutes la même longueur alors le tétraèdre est dit régulier.

ABCD est un **tétraèdre régulier** et $AB = a$ ($a \in \mathbb{R}^{*+}$)



1) Propriétés des arêtes

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

b) Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales (voir que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$)

c) Montrer que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales, ainsi que les droites (AD) et (BC).

d) I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD]. Vérifier que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, et déduisez-en que (IJ) est orthogonale à (AB) et (CD).

2) hauteurs du tétraèdre régulier

La hauteur issue de A est la perpendiculaire menée de A au plan (BCD).

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- a) G est le centre de gravité du triangle BCD. Calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$, déduisez-en que (AG) est la hauteur issue de A du tétraèdre.

On rappelle qu'une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites sécantes appartenant à ce plan.

- b) Préciser les autres hauteurs du tétraèdre.

3) Propriétés de l'iso barycentre du tétraèdre

O est l'iso barycentre du tétraèdre ABCD

- a) montrer que les points A, O, G, sont alignés. Calculer AG et AO.
b) montrer que O est milieu de[IJ].
c) calculer les longueurs OA, OB, et OI (travailler dans le plan (AOB)).
d) montrer que le point O est équidistant des sommets du tétraèdre.

On dit que O est le centre du tétraèdre.

4) calcul de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$

- a) Evaluer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ des deux façons suivantes :

- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos \alpha$, où $\alpha = \text{mes}(\widehat{AOB})$
- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})$

- b) déduisez – en une approximation de α exprimé en degrés.

Exercice 2 :

Soit OABC un tétraèdre dont les arêtes contenant le point O sont deux à deux perpendiculaires. On dit que OABC est un tétraèdre trirectangle en O.

- 1) Montrer que les arêtes opposées du tétraèdre sont perpendiculaires.
- 2) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
 - a) Montrer que le plan (OCH) est perpendiculaire à la droite (AB).
 - b) Montrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.
 - c) Soit K l'intersection de (CH) et (AB).

Montrer que (OK) est une hauteur du triangle OAB .

En déduire que $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$. (On pourra exprimer de deux manières différentes l'aire du triangle OAB).

Exercice 3 :

Soit ABCDEFGH un cube tel que le repère (D, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$) soit un repère orthonormé direct. Soient I et J les milieux respectifs de [AD] et [DC].

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



1°) a) Déterminer le produit vectoriel $\vec{DB} \wedge \vec{ID}$.

b) Exprimer l'aire du triangle BDI.

2°) a) Déterminer le point M du plan (BCG) tel que les vecteurs $\vec{IF}$ et $\vec{JM}$ soient colinéaires.

b) Déterminer une équation du plan (P) orthogonal à (IF) et passant par G.

Exercice 4 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On considère le point A de coordonnées $(-2; 8; 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1; 5; -1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) , passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2) On considère les plans (P) et (D) d'équations cartésiennes respectives :
 $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.

Démontrer que les plans (P) et (D) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d') . Montrer que le vecteur de coordonnées $(2; 1; 1)$ est un vecteur directeur de (d') .

3) Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

4) On considère le point H de coordonnées $(-3; 3; 5)$ et le point H' de coordonnées $(3; 0; -4)$.

- Vérifier que H appartient à (d) et que H' appartient à (d') .
- Démontrer que la droite (HH') est perpendiculaire aux droites (d) et (d') .
- Calculer la distance entre les droites (d) et (d') .

5) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$.

Exercice 5 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit la sphère S d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0$ et (P) le plan d'équation :

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



$$2x + y - z - 1 = 0$$

1) a) Montrer que (P) et S sont sécants

b) Déterminer le rayon et le centre de leur cercle d'intersection.

2) Déterminer une équation cartésienne d'un plan tangent à S et parallèle à (P).

Exercice 6 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les droites (D) et (D') par des systèmes d'équations cartésiennes :

$$(D) \begin{cases} x = 1 \\ y + 2x = 4 \end{cases} \quad (D') \begin{cases} z = 3 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer la perpendiculaire commune à (D) et (D')

2) Calculer la distance entre ces deux droites.

PROBLEME :

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient trois nombres réels strictement positifs a, b et c et les points : $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$ et $T(a ; b ; c)$.

1) Démontrer que $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) a) Soit H le projeté orthogonal du point T sur le plan (ABC) et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan (ABC). En utilisant le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{TH}$, calculer la distance du point T au plan (ABC).

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

c) En déduire le volume du tétraèdre ABCT.

3) On note $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les mesures respectives des angles géométriques du triangle ABC.

a) Calculer $\cos \hat{A}$ en fonction de a, b et c .

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- b) En déduire que : $a^2 \tan \hat{A} = b^2 \tan \hat{B} = c^2 \tan \hat{C} = 2 \text{ aire}(ABC)$.
- 4) On suppose dans cette question, que : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
- a) Déterminer les équations de plans médiateurs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AT]$.
 - b) Préciser le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCT et donner une équation cartésienne de cette sphère.
 - c) Déterminer une équation du plan P tangent en T à cette sphère.
 - d) Pour quelles valeurs de a , b et c le plan P est-il parallèle au plan (ABC) ?
 - e) Lorsque ces plans ne sont pas parallèles, déterminer une équation du plan perpendiculaire aux plans P et (ABC) et passant par O.