Matière : Mathématique	**Courbes paramétrées**	**Professeur** : M. Sylla
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Niveau** : TS1

Exercice 1 :

Dans le plan orienté, (C) est le cercle trigonométrique. A tout point m de (C) on associe le point M symétrique du point A d'affixe 1 par rapport à la tangente en m au cercle (C). On cherche à construire l'ensemble (Γ) des points M lorsque m décrit (C).

1) Montrer que l'axe des abscisses est un axe de symétrie de (Γ).
2) Pour un point m de (C), soit t une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Om}}\right)$. Montrer que les coordonnées $\left(x(t), y(t)\right)$ de M sont telles que : $\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ (1).
3) On doit construire la courbe (Γ) dont (1) est un système d'équations paramétriques, le réel t parcourant ℝ.
   a) Etudier les variations de x(t) et de y(t) sur $[0, \pi]$.
   b) Montrer que, pour tout $t \neq 0[\pi]$, un vecteur directeur de la tangente en M à (Γ) est $\vec{u}\left(cos\left(\frac{3t}{2}\right), sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right)$.
   c) Soit M un point de (Γ) de paramètre t ; $a(t)$ le coefficient de la droite (AM). Déterminer la limite a_0 de $a(t)$ lorsque t tend vers 0. (On admettra que a_0 est la pente de la tangente en A à (Γ).
   d) Déterminer tous les points où la tangente est parallèle à un des axes du repère.
4) Tracer la courbe (Γ).

Exercice 2 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe (Γ) d'équations paramétriques :$\begin{cases} x(t) = ln(2 + \sin t) \\ y(t) = ln(2 + \cos t) \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

a) Comparer $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ ainsi que $M(t)$ et $M\left(-t + \frac{\pi}{2}\right)$.
b) En déduire que la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve (Γ) et montrer que pour construire (Γ), il suffit d'étudier x et y dans $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right]$.
c) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y dans $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ et tracer la courbe (Γ).

Exercice 3 :

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\, \vec{u}, \vec{v})$, les trois points A, B et C de coordonnées respectives $(1{,}0)$, $(0{,}1)$ et $(1{,}1)$. A tout réel $t \in [0{,}1]$ on associe le point $M(t)$, barycentre du système $\{(B, (1-t)^2), (A, 2t(1-t)), (C, t^2)\}$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$, (Γ) l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $[0{,}1]$.

1) a) Exprimer en fonction de t les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de $M(t)$.
   b) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y et tracer la courbe (Γ) ainsi que ses tangentes aux points B, C et $M\left(\frac{1}{2}\right)$.
2) Montrer que les tangentes à (Γ) en B et C se coupent en A.
3) Trouver une relation entre $x(t)$ et $y(t)$ indépendante de t. On calculera y en fonction de x et on posera $y = f(x)$. La fonction f est-elle dérivable à gauche au point 1 ?

Exercice 4 :

1) Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par $f(t) = e^{-t}\cos t$.
   Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthogonal (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).
2) Soit g le prolongement à $\mathbb{R}$ de f.
   a) Comparer $g(t)$ et $g(t+2\pi)$. Donner alors le sens de variations de g.
   b) On pose $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$. On note (C_u) et (C_v) leurs courbes représentatives et (Γ) celle de g dans le même repère.
   Quels sont les points communs à (Γ) et (C_u) d'une part, à (Γ) et (C_v) d'autre part ?
   c) Montrer qu'en chacun de ces points communs les deux courbes ont la même tangente.
   d) Démontrer que g admet une limite en $+\infty$. (On fait remarquer que : $-1 \leq cos\ t \leq 1$).
3) Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la courbe paramétrée (Λ) définie par le système d'équations :
   $$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t \\ y(t) = e^{-t}\sin t \end{cases} \quad \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right).$$
   a) Etudier les variations des fonctions x et y et dresser le tableau des variations conjointes.
   b) Soit M_t le point de (Λ) de paramètre t et $\overrightarrow{V_t}$ le vecteur dérivé lui correspondant. Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ et montrer que l'angle $\left(\overrightarrow{OM_t}, \overrightarrow{V_t}\right)$ est constant.

c) Représenter graphiquement (Λ). Préciser les tangentes aux points de paramètres $-\frac{\pi}{2}$ et 0.

Exercice 5 :

(Une rosace à quatre feuilles)

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal .

Un point A sur l'axe des abscisses et Un point B sur l'axe des ordonnées sont tels que AB = 1.

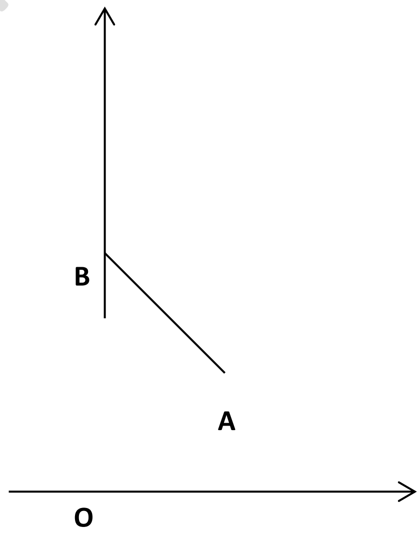
On note M le projeté orthogonal de O sur [AB] .

On se propose de déterminer le lieu géométrique C de M lorsque A et B se déplacent , chacun sur son axe .

1°) On note (x , y) les coordonnées de M et t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},-\vec{i})$.

Montrer que C est l'ensemble des points M(t) de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = f(t) = \sin^2 t \cos t \\ y(t) = g(t) = \cos^2 t \sin t \end{cases} \quad (t \in IR)$$



2°) Pour tout réel t , comparer la position

des points M(t+2π) et M(t) , puis M(- t) et M(t) ,

puis M(π - t) et M(t) et enfin M(π/2 - t) et M(t).

En déduire qu'il suffit de faire l'étude sur [0 ; π/4]

et de construire la partie de la courbe correspondante.

Indiquer les transformations qui permettent de compléter

la courbe.

3°) Etudier les variations des fonctions f et g sur [0 ; π/4] .

°) Tracer la courbe en précisant les points où la tangente est parallèle à l'un des axes , ainsi que les tangentes à l'origine .