Matière : Mathématique	**Étude de Fonctions**	**Professeur** : M. Mamadou Faye
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Niveau** : TS1

Exercice 1 :

1) Montrer qu'un polynôme p(x) de degré 2 peut s'écrire sous la forme :

p(x) = $p(0)+x\,p'(0)+\dfrac{x^2}{2}p''(0)$

2) Montrer qu'un polynôme q(x) de degré 3 peut s'écrire sous la forme :

q(x)= $q(0)+x\,q'(0)+\dfrac{x^2}{2!}q''(0)+\dfrac{x^3}{3!}q'''(0)$

3) Soit f et g deux fonctions dérivables sur I = [0 ; 1] telles que f(0) = g(0) et f ' < g ' sur I . Démontrer que f $\leq$ g sur I

4) Démontrer que si a est un zéro double d'un polynôme f(x) alors a est un zéro du polynôme f '(x)

Exercice 2 :

Montrer que :

1°) Pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

2°) Pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, on a $x \leq \tan x \leq \dfrac{4}{\pi}x$

3°) Pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $1-\dfrac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \dfrac{\pi}{2}-x$

4°)a) Pour tout x > 0, on a $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1}-\sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Exercice 3 :

Inégalité de BERNOULLI

Info : Le résultat est connu sous le nom d'inégalité de Bernoulli ; Pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$ on a $x^n - 1 \geq n(x-1)$.

1) En étudiant une certaine fonction , démontrez ce résultat.
2) Démontrez ce résultat par récurrence sur n ; x étant supposé fixe .

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$f : x \mapsto x + \sqrt[3]{x}$

1) Soit $x \in]0, +\infty[$. Montrer que pour tout $\beta \in [x, x+1]$ on a

$$\frac{1}{3.\sqrt[3]{(x+1)^2}} + 1 \leq f'(\beta) \leq \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}} + 1$$

2) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$

Exercice 5 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un fermé $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, telles que : $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$ ($a < b$)

1°) Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que

$f(x_0) = g(x_0)$

2°) Montrer qu'il existe un $x_1 \in]a, b[$ tel que

$f'(x_1) = g'(x_1)$.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $IR - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x - 2}$

1) Déterminer la fonction dérivée f ‘ de f
2) En déduire la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$g : x \to \dfrac{3\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 2}$ *définie sur* $[0 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$; $h : x \to \dfrac{3\cos x - 4}{\cos x - 2}$; *définie sur* $\Re$

Exercice 7 :

Soit m un paramètre réel non nul . Soit(C_m) les courbes d’équation :

$y = \dfrac{x}{m} + 3 - \dfrac{2}{m} + \dfrac{1-2m}{mx}$. Démontrer que toutes les courbes ont un point commun et qu’elles sont tangentes en ce point

Exercice 8 :

On donne un réel $t > 0$. Soit la fonction

$f_n : x \mapsto x^n - t(1 - x)$

1°) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l’équation $f_n(x) = 0$ admet une solution et une seule comprise entre 0 et 1. Soit u_n cette racine.

2°) Montrer que, pour tout n de IN^*,

$f_{n+1}(u_n) = -t(1 - u_n)^2$

3°) En déduire que (u_n) est croissante.

4°) En déduire que u_n converge et calculer sa limite

Exercice 9 :

A) Soit f la fonction de $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ *vers* $[0 ; 1]$ *définie par* $f(x) = \sin^2 x$

1) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1}
2) Déterminer l’ensemble de dérivabilité de f^{-1} et démontrer que sa dérivée est la fonction : $x \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

B) Soit f la fonction de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ *vers* $[1\ ;\ +\infty[$ *définie par*

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

1) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1}
2) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et démontrer que sa dérivée est la fonction $x \to \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 10 :

On pose pour a réel strictement positif la fonction f_a définie sur [0, a] par :

$$f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}$$

1) Montrer que f_a réalise une bijection de [0, a] sur $\left[0, \frac{1}{a}\right]$. On note f_a^{-1}Sa bijection réciproque .

2) Dresser le tableau des variations de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.

Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x + 1$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$
2) Etudier les variations de f (limites, dérivée, TV , branches infinies)
3) Montrer que f est bijective de $[0, +\infty[$ sur J à préciser
4) Sur quel ensemble f^{-1} est –elle dérivable ?
5) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x $\in$J
6) Montrer que l'équation f(x) = x + 2 admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie sur $[-1,1]-\{0\}$par f(x) = 1 + $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ .On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

PARTIE A

1)Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, interpréter les résultats obtenus

2) Etudier la dérivabilité de f en 1 puis en - 1 et interpréter les résultats obtenus

3) Montrer que pour tout x $\in$]-1, 1[- {O} : $f\,'(x) = \dfrac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5) Montrer que f réalise une bijection de]0, 1[sur un intervalle J que l'on précisera.

6) Expliciter f^{-1}et construire les courbes C et C' de f^{-1}.

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = $f(\cos x)$

1) Montrer que pour tout x $\in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, g(x) = 1 + tan(x)
2) Etudier le sens de variation de g
3) Monter que l'équation g(x) = x admet une unique solution α dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et vérifier que

   0 < α < $\dfrac{\pi}{4}$
4) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera
5) Montrer que g -1 est dérivable sur K et $\forall x \in K : (g^{-1})'\ (x) = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$

Exercice 13 :

Soit f : x $\rightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & si\ x > 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}\tan(x+\dfrac{\pi}{4}) & si\ -\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition
2) Etudier les variations de f et construire sa courbe
3) Soit g la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$
   a) Montrer que g est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ sur un intervalle J à préciser
   b) Déterminer le domaine de dérivabilité de g $^{-1}$ puis expliciter $(g^{-1})(x)$
   c) Montrer que l'équation g(x) +x = 0 admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$
4) En déduire que I(-α, α) $\in Cg^{-1} \cap D$ ou Cg $^{-1}$ est la courbe de g $^{-1}$ et D la droite d'équation
   y = -x

PROBLEME 1 :

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : f(x) = tan(x).

1°) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur IR

2°) Soit h la fonction réciproque de f. Montrer que h est dérivable sur IR et calculer h'(x) pour tout x ∈ IR.

3°) Soit φ la fonction définie sur $[0,1[$ par : $\varphi(x) = h\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

a-Montrer que φ est dérivable sur $[0,1[$ et calculer $\varphi'(x)$

b- En déduire que $\forall x \in [0,1[, \varphi(x) = \frac{\pi}{4} + h(x)$

4°) Soit g la fonction définie sur $[0,1[$ par $g(x) = h\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - (1+2x)h(x)$

a- Montrer que g est deux fois dérivables sur $[0,1[$ et calculer g '(x) et g ''(x).

b- Etudier les variations de g ' sur $[0,1[$ et en déduire celles de g ;

c- En déduire qu'il existe un unique réel

$c \in]0,1[$ tel que c = tan $\frac{\pi}{8c}$

5°) a- Montrer que l'équation h(2-x) = 2 h(x) admet au moins une solution $\alpha \in IR$.

b- Montrer que α vérifie la relation :

$\alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$

PROBLEME 2 :

Soit F la fonction définie sur IR vérifiant :

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ F'(x) = \dfrac{2}{4+x^2} \quad \forall x \in IR \end{cases}$$

1) a) Montrer que F est impaire (Etudier G(x) = F(x) + F(- x)). **<u>0, 25 pt</u>**

b) Montrer que F est croissante sur IR. **<u>0, 25 pt</u>**

2) a) En majorant $\frac{2}{4+x^2}$ sur [0, 2] , prouver que F(2) ≤ 2 **<u>1 pt</u>**

b) En remarquant que $\frac{2}{4+x^2} \leq \frac{2}{x^2}$; montrer que F est majorée sur [2 , + ∞ [. **<u>1 pt</u>**

<u>Indication</u> : Etudier H(x) = F(x) + $\frac{2}{x}$.

c) En déduire que F admet une limite L finie en + ∞. **<u>1 pt</u>**

Encadrer L. **<u>0, 5 pt</u>**

3) Soit g la fonction définie sur $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par g(x) = 2tanx.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} Fog(x)$ **<u>0,75 pt</u>**

b) Montrer que $\forall \ x \in]\frac{-\pi}{2} \frac{\pi}{2}[\ , \quad Fog(x) = x.$ **1 pt**

[1] c) Déduire de 3- b) la valeur de L **0, 5 pt**

4) Etablir le tableau de variations de F et tracer CF. **1, 75 pt**

On précisera les asymptotes, les tangentes en 0 et en 2.

PROBLEME 3 :

PARTIE I Soit la fonction f définie sur par :

$$f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1°) Etudier les variations de f.

2°) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]-1,1[$ une solution unique α tel que α > $\frac{4}{5}$.

3°) En déduire le signe de f(x) – x.

4°) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur IR.

5°) Montrer que pour tout x de IR on a

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$$

PARTIE II Soit la suite u définie sur IN par $\begin{cases} u_0 \in [0, \alpha] \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

1°) a- Montrer que, pour tout n de IN, $0 \leq u_n \leq \alpha$

b- Montrer que la suite u est croissante.

c-En déduire que u est convergente et calculer sa limite.

2°) Montrer que pour tout $x \in IR_+$ on a $\left|(f^{-1})'(x)\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3°) Montrer que pour tout n de IN on a : $\left|u_{n+1}-\alpha\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|u_n-\alpha\right|$

4°) En déduire que pour tout n de IN on a : $\left|u_n-\alpha\right| \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n\left|u_0-\alpha\right|$. Retrouver la limite de u.

PARTIE III : Soit la fonction h définie sur $\left]-1,1\right[$ par : h(x) = f(- sin($\frac{\pi}{2}x$))

1°) Montrer que pour tout x de $\left]-1,1\right[$:

h(x) = - 1 - tan$\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

2°) Montrer que h établit une bijection de $\left]-1,1\right[$ sur IR.

3°) Montrer que h^{-1} est dérivable sur IR et que

$$(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi\left(1+(x+1)^2\right)}$$

4°) Soit pour tout x de IR* la fonction H telle que : $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}(\frac{1}{x}-1)$.

a- Montrer que H est dérivable sur IR et déterminer H ‘ (x).

b- Calculer $H\left(\frac{1}{2}\right)$et $H\left(-\frac{1}{2}\right)$. En déduire que : $\begin{cases} H(x) = -1\ ,\ si\ x>0 \\ H(x)=1\ \ ,si\ \ x<0 \end{cases}$

5°) Pour tout n de IN on a : $v_n = \sum_{k=1}^{n}[h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)]$ et $w_n = \frac{v_n}{n}$

a- Donner la valeur de H $\left(1+\frac{1}{k}\right)$. En déduire que : ∀ k ∈ IN * :

$$h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1.$$

b- Montrer que pour tout n de IN* : $v_n = n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$.En déduire que la suite w est convergente et donner sa limite.

FIN