| | | |
|---|---|---|
| **Matière** : Mathématique | **Équations différentielles** | **Professeur** : M. Sylla |
| **Groupe Excellence** (cours en ligne) | | **Niveau** : TS1 |

## Exercice 1 :

Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = x\ln x$, et (F) l'ensemble des fonctions numériques f, dérivables sur $]0,+\infty[$, et telles que pour tout $t \in ]0,+\infty[$ et pour tout $x \in ]0,+\infty[$,

(1) $\quad f(tx) = tf(x) + xf(t)$.

1) Démontrer que, pour tout réel k fixé, la fonction $kh$ appartient à (F).
   (On rappelle que $(kh)(x) = kh(x)$).
2) Démontrer que si f appartient à (F), alors $f(1) = 0$. (On remarquera que $1 = 1 \times 1$).
3) Pour tout $x \in ]0,+\infty[$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.
   a) Démontrer que si f appartient à (F), alors pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $\quad xf'(x) = f(x) + xf'(1)$.
   b) On suppose que f appartient à (F). Déduire du a) une équation différentielle vérifiée par la fonction g.
4) Déterminer toutes les fonctions vérifiant la relation (1).

## Exercice 2 :

On considère l'équation différentielle : $y' + y = \frac{e^{-x}\cos x}{2+\sin x}$ $\qquad$ (E).

f étant une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose : $g(x) = e^{x}f(x)$.

1) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$.

2) Déterminer la solution générale de (E) ; en déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

## Exercice 3 :

Soit l'équation différentielle :

$$(E_m): \quad my'' + 2y' + 2y = 0, \quad \text{où m est un réel.}$$

1) Déterminer suivant les valeurs de m l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de $(E_m)$.

2) Déterminer la solution de $(E_1)$ dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $(0;1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y=-x$.

**Exercice 4 :**

Dans cet exercice, on cherche à calculer l'intégrale

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin(2x)+e^{-x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]dx$$

à l'aide d'une équation différentielle.

1) Résoudre équation différentielle : $y''+2y'+2y=0$ $(E_1)$.

2) On considère équation différentielle : $y''+2y'+2y=4\cos(2x)-2\sin(2x)$ (E)

a) Déterminer deux réels a et b pour que la fonction $f_1$ définie par :
$\forall x\in IR,\ f_1(x)=a\sin(2x)+b\cos(2x)$

soit solution de équation (E).

b) En déduire la forme générale des fonctions vérifiant équation (E).

3) a) Vérifier que la solution f de (E) telle que $f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'(0)=2$ est :

$$f(x)=\sin(2x)+e^{-x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

b) Utiliser (E) pour trouver l'ensemble des primitives F de f.

c) En déduire la valeur de intégrale I.

**Exercice 5 :**

1) Soit f une fonction numérique dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$.

Soit $(E)$ l'équation $xy' - 2y = \ln x$ ; on dit que f est solution de $(E)$ si et seulement si, pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$ : $xf'(x) - 2f(x) = \ln x$ (f' désignant la dérivée de f).

Démontrer que f est solution de $(E)$ si et seulement si g est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^3}$.

2) Quel est l'ensemble des primitives de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^3}$ ?
(On pourra faire une intégration par parties).
3) En déduire que l'ensemble des solutions de $(E)$ est l'ensemble des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :
$x \longmapsto -\frac{1+\ln(x^2)}{4} + ax^2$, où a désigne une constante réelle arbitraire.
4) On désigne par $\varphi$ la fonction : $x \longmapsto -\frac{1+\ln(x^2)}{4} + \frac{1}{4}x^2$, où $x \in ]0, +\infty[$.
Etudier la variation de $\varphi$ et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1) Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
$y'' + y = 0$ (1).
2) Etant donnée une fonction numérique de variable réelle, g, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ ; on définit la fonction f de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par :
$\forall\, x \in \mathbb{R}^*; f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.

3) On considère l'équation différentielle
$y'' = -\frac{1}{x^4}y$ (2).
a) Démontrer que la fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ est solution de (2) si et seulement si la fonction f définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*; f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (1).
b) En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
4) Soit g une solution de (2) définie sur $]0, +\infty[$ . Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$.