

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Matière : Mathématique	Étude de fonctions	Professeur : M. Ndiaye, M. Bâ
Groupe Excellence (cours en ligne)		Niveau : TS1

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f . Calculer sa fonction dérivée.
- 2) Démontrer les équivalences suivantes : $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty ; -\frac{1}{2} \right]$ et $\sqrt{1 - 4x^2} - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2\sqrt{5}} \right]$. En déduire le signe de $f'(x)$.
- 3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Dresser le tableau de variation de f .
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$. En déduire que (C) admet deux asymptotes d'équations $y = -x$ et $y = 3x$. Tracer (C).
- 4) a) Soit h la restriction de f à $\left] -\infty ; -\frac{1}{2} \right]$. Démontrer que h admet une réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et la variation. On note (Γ) la courbe de h^{-1} .
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + h^{-1}(x)]$. En déduire que (C) et (Γ) ont une asymptote commune. Tracer (Γ). Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point de coordonnées $(0 ; h^{-1}(0))$.

Exercice 2 :

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$.

1) Vérifiez que pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$.

2) Étudiez la fonction f . Démontrez que sa courbe (C) admet un centre de symétrie.

B. Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(t) = \frac{1 - \sin^2 t}{2 + \sin t}$

1) Comparez pour tout réel t : $\varphi(\pi - t)$ et $\varphi(t)$. Expliquez comment l'étude du sens de variation de la restriction de φ à $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$ permet de construire la courbe représentative de φ .

2) Le but de cette question est de prouver que l'équation $\varphi'(t) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- Montrez que la dérivée f' de f est strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$. Quelle est l'image de $[-1 ; 1]$ par f' ?
- Prouvez que φ est dérivable et exprimez φ' en fonction de f' . Prouvez l'existence et l'unicité de α . Calculez la valeur exacte de $\varphi(\alpha)$.
- Calculez les valeurs exactes de : $\varphi(0)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\varphi'(0)$.
- Etudiez le sens de variation de la restriction de φ à $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. Tracez la courbe représentative de φ dans un repère orthonormal (unité : 3cm).

Exercice 3 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 1cm).

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + 4 - 4\sqrt{x}$.

- Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- Etudier les variations de f .
- Tracer la courbe représentative (C) de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- Soit g la restriction de f à $[4 ; +\infty[$. Démontrer que g est une bijection de $[4 ; +\infty[$ sur $[0 ; +\infty[$ et que sa bijection réciproque g^{-1} est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g^{-1}(x) = x + 4 + 4\sqrt{x}$.

b) Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1} dans le même repère que (C) .

On note (Γ) la courbe définie par : $(\Gamma) = (C) \cup (C')$.

3) Soit (E) la courbe d'équation : $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Démontrer que pour tous réels x et y positifs, on a :

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow [y - f(x)][y - g^{-1}(x)] = 0.$$

En déduire que $(\Gamma) = (E)$.

b) Démontrer que si un point $M(a, b)$ appartient à (Γ) alors le point $M'(b, a)$ appartient également à (Γ) .

En déduire que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie. Préciser cet axe.

Exercice 4 :

A) On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R}_+ par : $\varphi(x) = \frac{2x}{1+x^4}$.

1°) Etudier φ sur $[0, 1]$, en déduire que $\frac{6}{5}$ majore φ sur cet intervalle.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



2°) Prouver que, pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $\varphi(x) < \frac{2}{x^3}$.

3°) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^+ et telle que : $f(0) = 0$ et $f'(x) = \varphi(x)$.

a) Dédurre des questions précédentes une majoration de $f(1)$ et une autre de la fonction f sur $[1 ; +\infty[$ par une fonction g .

Indication : Appliquer l'inégalité des Accroissements Finis à la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$.

3°) Montrer que f admet une limite finie l en $+\infty$. Préciser un encadrement de l .

B) Soit α la fonction définie ainsi : $\alpha : \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\tan x}$

1°) Etudier la dérivabilité de α en chacun des points de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\alpha'(x) = \frac{1 + [\alpha(x)]^4}{2 \alpha(x)}$

2°) Etudier les variations de α et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

3°) Montrer que α admet une fonction réciproque α^{-1} ; préciser les propriétés de α^{-1} (ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité, sens de variation) ; donner la valeur exacte de $\alpha^{-1}(1)$.

4°) Soit $\beta = f \circ \alpha$. Montrer que β est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\beta'(x) = 1$ pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

En déduire que $\alpha^{-1} = f$. Donner alors la valeur exacte de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$.

5°) Construire dans le repère du 2° la courbe de f .

Exercice 5 :

PARTIE I Soit la fonction f définie sur par : $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1°) Etudier les variations de f .

2°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $] -1, 1[$ une solution unique α tel que $\alpha > \frac{4}{5}$.

3°) En déduire le signe de $f(x) - x$.

4°) Montrer que f réalise une bijection de $] -1, 1[$ sur \mathbb{R} .

5°) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} on a : $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



PARTIE II : Soit la fonction h définie sur $] -1, 1[$ par : $h(x) = f(-\sin(\frac{\pi}{2}x))$

1°) Montrer que pour tout x de $] -1, 1[$: $h(x) = -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

2°) Montrer que h établit une bijection de $] -1, 1[$ sur \mathbb{R} .

3°) Montrer que h^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et que $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi(1+(x+1)^2)}$

4°) Soit pour tout x de \mathbb{R}^* la fonction H telle que : $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)$.

a- Montrer que H est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer $H'(x)$.

b- Calculer $H\left(\frac{1}{2}\right)$ et $H\left(-\frac{1}{2}\right)$. En déduire que : $\begin{cases} H(x) = -1, & \text{si } x > 0 \\ H(x) = 1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

5°) Pour tout n de \mathbb{N} on a : $v_n = \sum_{k=1}^n \left[h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right) \right]$ et $w_n = \frac{v_n}{n}$

a- Donner la valeur de $H\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1.$$

b- Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* : $v_n = n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$. En déduire que la suite w est convergente et donner sa limite.

Exercice 6 :

Soit f_0 la fonction définie sur $] -\infty ; 1]$ par $f_0 = \sqrt{1-x}$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, f_n est la fonction définie sur $] -\infty ; 1]$ par $f_n = x^n \sqrt{1-x}$.

A.1) Dresser le tableau de variation de f_n pour $n \geq 1$, en distinguant les cas : n pair et n impair. Déterminer l'unique élément $\alpha_n \in]0 ; 1[$ tel que : $f_n'(\alpha_n) = 0$, $n \geq 1$.

2) Représenter dans un même repère orthonormal les fonctions f_0, f_1, f_2 .

B.1) Déterminer graphiquement, selon les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f_1(x) = k$.

2) Montrer que l'équation $|x\sqrt{1-x}| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1, x_2, x_3 vérifiant :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0 \quad ; \quad 0 < x_2 < \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{2}{3} < x_3 < 1.$$

3) Pour $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$, on pose alors : $u_i = \frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)$.

Montrer qu'il existe un unique réel $\theta_i \in [0 ; \pi]$ tel que : $u_i = \cos \theta_i$.

Groupe Excellence



Excellez avec les meilleurs professeurs !

- 4) Montrer que θ_1, θ_2 et θ_3 sont les solutions de l'équation : $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ avec $\theta \in [0 ; \pi]$.
- 5) Donner alors une valeur approchée à 10^{-5} près de x_1, x_2 et x_3 .