

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Matière : Mathématique	Dérivée Primitives	Professeur : M. Ndiaye, M. Bâ
Groupe Excellence (cours en ligne)		Niveau : TS1

Exercice 1 :

1. Soit f une fonction définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et dérivable en a .

Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$.

2. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que : f croissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si f' a un extremum local en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors la courbe de f traverse sa tangente au point d'abscisse x_0 . (Point d'inflexion.)

Exercice 2 :

1. Démontrer que l'équation $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $2 \sin x + \tan x \geq 3x$ et $\frac{2}{\pi}x < \sin x \leq x$.

3. Soit $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$. Vérifier que : $2f'(x)\sqrt{1 + x^2} = f(x)$.

En déduire que : $4f''(x)(1 + x^2) + 4xf'(x) - f(x) = 0$.

4. a) Soit $f: x \mapsto \frac{1}{x-3}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f admet une dérivée d'ordre n en tout $x \neq 3$ et que : $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x-3)^{n+1}}$.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 3$, $g(x) = \frac{2x^2-8}{x-3} = ax + b + \frac{c}{x-3}$.

En déduire la dérivée d'ordre n de la fonction g .

Exercice 3 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que f est impaire et croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) En majorant $\frac{1}{1+x^2}$ sur $[0; 1]$, montrer que $f(1) \leq 1$.

b) En remarquant que $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, montrer que f est majorée sur $[1; +\infty[$.

c) En utilisant 1. et 2., montrer que f admet une limite finie ℓ que l'on encadrera.

3. On pose pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan x$.

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f \circ g(x) = \ell$.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $f \circ g(x) = x$. (Dériver la fonction $x \mapsto f \circ g(x) - x$).
- c) En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 4 :

1. Montrer que la fonction $f: x \mapsto \sin^2 x$ est bijective de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle à préciser. Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ est bijective de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle à préciser. Déterminer l'ensemble sur lequel la bijection réciproque g^{-1} est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Montrer que : $\forall x \in [-1; 1]$, $\text{Arccos}(-x) + \text{Arccos}(x) = \pi$, $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \pi/2$ et $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Exercice 5 :

On considère l'application $f:]0; 2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(x - 1)\right)$.

1. Montrer que f est une bijection de $]0; 2[$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. Soit h la bijection réciproque de f . Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $h'(x) = \frac{2}{\pi(x^2 + 1)}$.
3. Pour tout $x \neq 0$, on pose : $\varphi(x) = h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire que φ est une constante sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. Déterminer chacune de ces constantes.

Exercice 6 :

1. Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis aux fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[0; x]$, montrer que : $1 - x^2 \leq \cos x \leq 1$.
2. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f: x \mapsto \sqrt{1 + x}$, prouver que :
- (i) pour tout $x \in [1; 2]$, $|f(x) - x_0| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - x_0|$, où x_0 est la solution de l'équation $f(x) = x$. (ii) pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$ avec $\alpha \in]0; 1[$.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $[a; b]$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Soit c un réel de $]a; b[$. On définit la fonction g par : $g(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c)$.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



En appliquant le théorème de Rolle aux fonctions f_1 et f_2 définies par $f_1(x)=f(x)-g(x)$ et $f_2(x)=f'(x)-g'(x)$, démontrer qu'il existe un réel d de l'intervalle $]a; b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{2}(c-a)(c-b)f''(d).$$

Exercice 8 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} g(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que g n'est pas continue en 0.

3. La fonction g (qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}$) admet-elle des primitives sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9 :

1. Déterminer les primitives des fonction suivantes :

a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ b) $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$ c) $f(x) = \frac{4x+3}{(2x^2+3x+1)^3}$ d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ e) $f(x) = \sin 2x - 2 \cos 2x$ f) $f(x) = \sin x \cos^3 x$ g) $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ h) $f(x) = \tan^2 x$ i) $f(x) = \cos^3 x$ j) $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ k) $f(x) = \tan x + \tan^3 x$ l) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ m) $f(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$.

2. Déterminer la primitive F de f , vérifiant la condition indiquée :

a) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$; $F(2) = 0$ b) $f(x) = 3 \sin \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2}$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+8}}$; $F(2) = 4$ 3. Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que : $x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = x^2(x-1)^{2012}$.

4. Soit $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 1}{x^2(x^2+1)^2}$. Déterminer deux réels a et b tels pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{ax}{(x^2+1)^2} + \frac{b}{x^2}$. En déduire une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 10 :

1. Déterminer une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. On considère la fonction G , définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $G(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Montrer que G est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ et que : $G'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

3. En déduire une primitive sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x}$.

Exercice 11 :

(Fonction Arctangente)

Soient $f: x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1. Montrer que F est impaire.

2. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$. En formant la dérivée de G, montrer que F admet une limite en $+\infty$ égale à $2F(1)$.

3. On considère la fonction U définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par $U(t) = F(\tan t)$.

En calculant $U'(t)$, trouver une expression simple de U(t). En déduire la valeur de F(1) puis représenter graphiquement la fonction F.

Exercice 12 :

(Fonction logarithme népérien)

Soit F la primitive sur $]0 ; +\infty[$, qui s'annule en 1, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Montrer que : $F(x) > 0$ pour $x \in]1 ; +\infty[$ et $F(x) < 0$ pour $x \in]0 ; 1[$.

2. On pose pour tout $x > 0$, $G(x) = F(ax)$ avec $a > 0$. Montrer que G est une autre primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

3. En déduire que pour tous réels $x > 0$ et $a > 0$:

$$F(ax) = F(a) + F(x) \quad \text{puis} \quad F\left(\frac{x}{a}\right) = F(x) - F(a).$$

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

a) Etudier le sens de variation de g et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une dans $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

b) Préciser le signe de g(x) selon la valeur de x.

2. a) Calculer f'(x) et étudier le sens de variation de f.

b) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ puis dresser le tableau de variation de f.

3. a) Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$.

b) En déduire que (C) admet une asymptote (Δ) et étudier la position de (C) par rapport à (Δ).

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



4. Déterminer les abscisses des points B et B' de (C) admettant une tangente parallèle à (Δ).
- 5.a) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ et en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.
- b) Tracer (C) et (Δ) en plaçant les points B, B' ainsi que trois points I, J et K d'abscisses respectives 1, 2 et -1 avec leur tangente.