Chapitre 4

Fonctions réciproques

C'est le 29 novembre 1873 […] que Cantor écrit à Dedekind qu'il voudrait lui "soumettre une question qui a pour moi un certain intérêt théorique, mais à laquelle je ne puis répondre". Il s'agissait de savoir s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. […] La lettre de Cantor du 7 décembre 1873 contient la première démonstration de la non-existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et]0, 1[.

[…] C'est seulement trois ans plus tard, le 20 juin 1877, que Cantor envoie à Dedekind sa première démonstration […] de la bijection entre [0, 1] et [0, 1]×[0, 1], […], écrit-il " […]. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : je le vois, mais je ne le crois pas"

(J.Dieudonné, Abrégé d'Histoire des Mathématiques, 1978)

Chapitre 4

Fonctions réciproques

I. Définition

Activité 1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par $g(x) = 2x^2 - 3$.

1.a. Déterminer $g(]-\infty, 0])$.

b. Montrer que pour tout réel y de $[-3, +\infty[$, l'équation $g(x) = y$ admet une unique solution dans $]-\infty, 0]$ que l'on déterminera.

2. Soit h la fonction définie sur $[-3, +\infty[$ par $h(x) = -\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$.

Montrer que pour tout réel y de $]-\infty, 0]$, l'équation $h(x) = y$ admet une unique solution dans $[-3, +\infty[$.

3. Déterminer $g \circ h$ et $h \circ g$.

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (ou que f est une bijection de I sur $f(I)$), si pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I.

Théorème

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

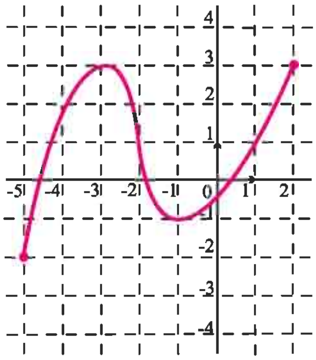
Démonstration

Soit y un réel de $f(I)$. Par définition de $f(I)$, il existe un réel x de I tel que $f(x) = y$.
L'unicité résulte de la stricte monotonie de f.

Activité 2

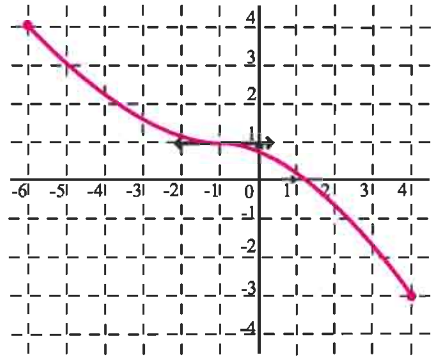
Parmi les fonctions f_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ représentées ci-après, identifier celles qui réalisent une bijection de I sur $f_i(I)$.

①



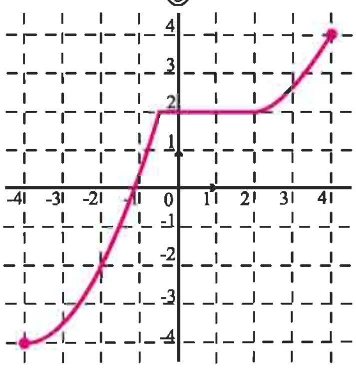
$I = [-5, 2]$ $\quad f_1(I) = [-2, 3]$

②



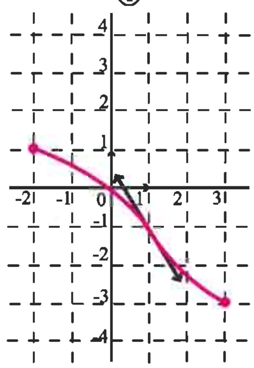
$I = [-6, 4]$ $\quad f_2(I) = [-3, 4]$

③



$I =]-4, 4[$ $\quad f_3(I) =]-4, 4[$

④



$I = [-2, 3[$ $\quad f_4(I) =]-3, 1]$

Définition

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout y de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = y$.

Conséquence

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque.

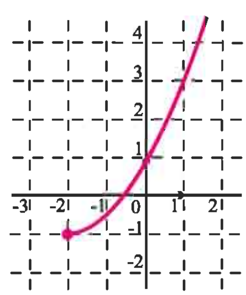
Pour tout x de I et tout y de $f(I)$, $f(x) = y$, si et seulement si, $f^{-1}(y) = x$.

$f^{-1} \circ f(x) = x$, pour tout x de I et $f \circ f^{-1}(y) = y$, pour tout y de $f(I)$.

Activité 3

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé une bijection de $[-2, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$.

Déterminer $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(3)$.



Activité 4

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

   a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$.

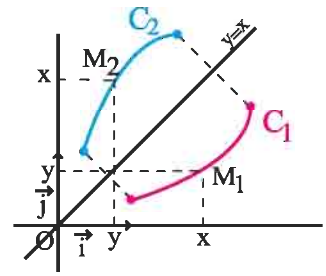
2. Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

   a. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

   b. Déterminer g^{-1}.

Représentation graphique de f^{-1}.

Soit f une bijection de I sur $f(I)$ et C_1 et C_2 les courbes respectives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé.
Soit $M_1(x,y)$ un point du plan et $M_2(y,x)$ son symétrique par rapport à la droite $\Delta : y = x$.



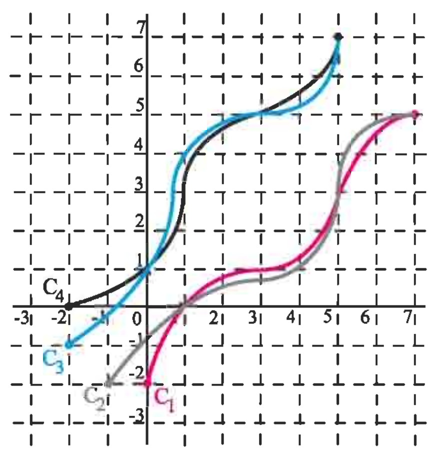
$$M_1(x,y) \in C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow M_2 \in C_2.$$

Conséquence

Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans la figure ci-contre, on a représenté les courbes de deux bijections f et g définies respectivement sur $[0,7]$ et $[-2,5]$, ainsi que les courbes de leurs fonctions réciproques.
Identifier la courbe de chacune des fonctions f, f^{-1}, g et g^{-1}.



II. Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f.

Démonstration

- La continuité de f^{-1} est admise.
- Supposons, par exemple que f est strictement croissante sur I.

Soit $y_1 < y_2$ deux réels de $f(I)$ et soit x_1 et x_2 les réels de I tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Si l'on avait $x_1 \geq x_2$, on en déduirait que $f(x_1) \geq f(x_2)$, c'est à dire $y_1 \geq y_2$.

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $y_1 < y_2$. Par suite $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ et f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, continue sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Donner les valeurs de $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $f^{-1}(1)$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. a. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b. Expliciter $f^{-1}(y)$, pour $y \in J$.

2. En utilisant la relation $f \circ f^{-1}(y) = y$, pour tout $y \in]0, \frac{1}{2}[$, montrer que

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Théorème

Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur $f(I)$, a un réel de I et $b = f(a)$.

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Ce résultat reste valable lorsqu'il s'agit de dérivée à droite ou à gauche en a.

Démonstration

Soit y un réel de $f(I)$ différent de b et soit $x = f^{-1}(y)$. Alors x est distinct de a et appartient à I.

On peut alors écrire $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$.

Lorsque y tend vers b, $x = f^{-1}(y)$ tend vers $a = f^{-1}(b)$ car f^{-1} est continue en b.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

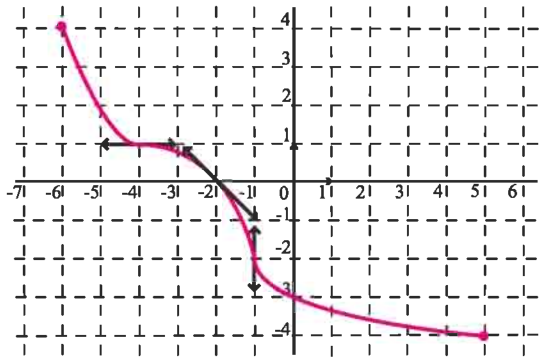
Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}, \text{ pour tout } y \text{ de } f(I).$$

Activité 3

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé une bijection f de $[-6, 5]$ sur $[-4, 4]$ ainsi que les tangentes au points d'abscisses -4, -2 et -1.

Etudier la dérivabilité de la fonction f^{-1} aux points d'abscisses -2, 0 et 1.



Activité 4

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

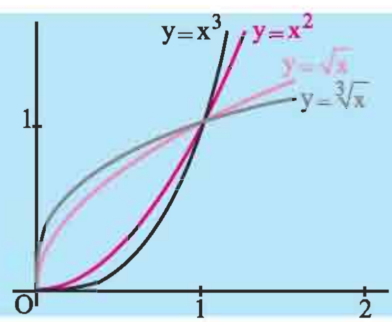
1. Tracer C_f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
3. a. Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

   b. Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -1 et à gauche en 1.
4. Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère orthonormé.

III. Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$

Théorème et définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée fonction racine $n^{\text{ème}}$.



Notation

L'image d'un réel positif x par la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est noté $\sqrt[n]{x}$ et se lit « racine $n^{\text{ème}}$ de x ». Lorsque $n = 2$ et pour x positif $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Conséquence

- Pour tous réels positifs x et y , $y = x^n$, si et seulement si, $x = \sqrt[n]{y}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Les opérations sur les radicaux découlent immédiatement de la définition de la fonction racine $n^{\text{ème}}$.

Conséquence

Soit deux entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b. Alors

$\sqrt[n]{a^n} = a$. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Activité 1

Ecrire plus simplement les réels $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[6]{2^{-12}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$, $\sqrt[3]{2^6.3^3}$, $\dfrac{\sqrt[8]{16}}{\sqrt[8]{81}}$, $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Activité 2

1. Comparer $\sqrt[6]{2^4}$ et $\sqrt[4]{2^3}$.
2. Soit un réel $x \geq 0$ .Comparer $\sqrt[6]{x^4}$ et $\sqrt[4]{x^3}$.

Théorème

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, $f'(x) = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, pour tout $x > 0$.

Démonstration

La fonction $g : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et admet une dérivée ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que sa fonction réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\left(g^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, $x > 0$.

Activité 3

Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$. Interpréter.

IV. Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$

Théorème

Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier $n \geq 2$.
La fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$. De plus, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}\right)}$, pour tout x de I tel que $u(x) > 0$.

Démonstration

La fonction f est la composée de la fonction $x \mapsto u(x)$ et de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.
Le théorème découle des propriétés de la composée de deux fonctions.

Exercice résolu 1

Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^2+1}$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$, pour tout réel x.
2. Etudier les branches infinies de C_f.
3. Etudier les variations de f et construire C_f.
4. Soit g la restriction de f à $[0, +\infty[$.
   a. Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives de f et g^{-1}.

Solution

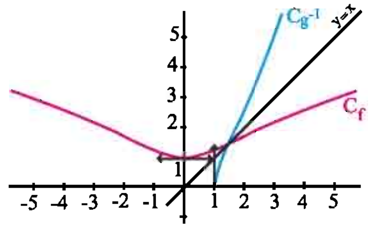
1. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{2x}{3\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\right)}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Remarquons que la fonction f est paire. Il suffit donc d'étudier la branche infinie en $+\infty$.
On sait que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (x^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \mapsto +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
De plus, on peut écrire pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^3}}$.
Il en résulte que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
Ainsi, C_f admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$.
La parité de f nous permet de déduire que C_f admet, au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$.

Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$

Courbes de f et g^{-1}



4. La fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)$.

De la continuité de g, on déduit que $g([0,+\infty[)=[1,+\infty[$.

Exercice résolu 2

I. On considère la fonction k définie sur $[0,+\infty[$ par $k(x)=-2x^4+x^3+1$.

Dresser le tableau de variation de k. En déduire le signe de k.

II. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{2x}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
3. On se propose d'étudier la position de C et T.

   Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x+\dfrac{1}{2}$.

   a. Montrer que $g'(x)=\dfrac{k(\sqrt{x})}{2x^2}$, $x>0$.

   b. En déduire le tableau de variation de g. Conclure.
4. Tracer T et C.
5. a. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

   b. On désigne par C' la courbe représentative de f^{-1} et par T' la tangente à C' au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$. Montrer que T et T' sont parallèles.

   c. Tracer dans le même repère T' et C'.

Solution

I. La fonction k est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\geq 0$, $k'(x)=x^2(3-8x)$.

On donne ci-contre le tableau de variation de k.

x	0		$\frac{3}{8}$		$+\infty$
$k'(x)$	0	$+$	0	$-$	
k	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^3$	$\searrow$	$-\infty$

En remarquant que $k(1)=0$ et en utilisant le tableau de variation de k,
on obtient $k(x)>0$ si $x<1$, $k(x)=0$ si $x=1$ et $k(x)<0$ si $x>1$.

II. 1. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x>0,\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2x^2}$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit le tableau de variation de f.

2. Le calcul donne $f(1)=\dfrac{1}{2}$ et $f'(1)=1$. On en déduit qu'une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 est $y=x-\dfrac{1}{2}$.

3. a. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x>0,\ g'(x)=f'(x)-1=\dfrac{k(\sqrt{x})}{2x^2}$.

b. On déduit de la question précédente que pour tout $x>0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $k(\sqrt{x})$.

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ étant positive et strictement croissante et en utilisant le signe de la fonction k, on déduit le tableau de variation de g. La fonction g admet le réel 0 pour maximum absolu, donc pour tout $x>0,\ g(x)\le 0$ ou encore $f(x)\le x-\dfrac{1}{2}$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On en déduit que la courbe C est au-dessous de la tangente T.

5. a. La fonction f étant continue strictement croissante, elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$.

b. La tangente T' à la courbe C' est la symétrique de T par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.
Les droites Δ et T ont même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.
On en déduit que T et T' sont parallèles.

c. La courbe C' est la symétrique de la courbe C par rapport à la droite d'équation $y=x$.