Chapitre 8

Fonction exponentielle

Des questions telles que "Si le nombre d'habitants d'une province s'accroît tous les ans d'une trentieme, & qu'il y ait au commencement 100.000 habitants; on veut savoir combien il y en aura au bout de 100 ans ?" (Euler 1748, Introductio §110) ou "Un particulier doit 400.000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent…"
En appliquant la formule du binôme, Euler dit sans la moindre hésitation, "Si N est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable la fraction $\left(\frac{N-1}{N}\right)$ égalera l'unité". […] si N tend vers l'infini, $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ tend vers le nombre d'Euler e.

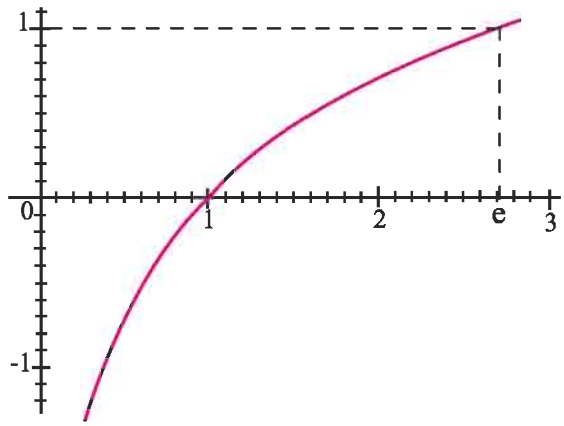
(E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000)

Chapitre 8

Fonction exponentielle

I. Définition et propriétés

Activité 1



1. Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction logarithme népérien.
Donner graphiquement une valeur approchée de l'antécédent de chacun des réels $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. Montrer que la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ admet une fonction réciproque que l'on désignera par exp. Tracer la courbe représentative de la fonction exp.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction exp et ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4. Que valent $\exp(0)$, $\exp(1)$, $\exp(2)$ et $\exp(-1)$?
5. Montrer que $\exp(n) = e^n$ pour n entier.
6. a. Soit a et b deux réels. Comparer $\exp(a+b)$ et $\exp(a).\exp(b)$; $\exp(a-b)$ et $\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$, $a \in \mathbb{R}$.

Définition

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est noté e^x.

Conséquences

- Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- $\ln e = 1$.

Activité 2

Utiliser une calculatrice pour donner une valeur approchée de $e^{\frac{2}{3}}$, $e^{\sqrt{3}}$ et $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Activité 3

Simplifier $e^{\ln 1}$, $e^{\ln 2}$, $e^{-\ln 3}$, $\ln\left(e^{-2}\right)$, $\ln\left(e^{-2\ln 3}\right)$.

Propriétés

Soit deux réels a et b.

P_1. $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

P_2. Pour tout entier n, $e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

P_3. Pour tout entier naturel $q \geq 2$, $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.

P_4. Pour tout entier naturel $q \geq 2$ et tout entier p, $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

Démonstration

Les propriétés P_1 et P_2 ont été démontrées dans l'activité 1.

P_3. Soit q un entier tel que $q \geq 2$ et a un réel.

En écrivant $a = q \times \dfrac{a}{q}$, on obtient $e^a = e^{q \times \frac{a}{q}}$. De la propriété P_2 on en déduit que $e^a = \left(e^{\frac{a}{q}}\right)^q$.

Par suite $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.

P_4. Soit q un entier tel que $q \geq 2$ et p un entier naturel. On peut écrire $e^{\frac{p}{q}a} = e^{\frac{1}{q}(pa)} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

Activité 4

Simplifier les écritures suivantes $\sqrt[6]{e^2} \times e^{\frac{3}{2}}$; $\dfrac{\sqrt{e^3}}{\sqrt{e^{-4}}}\sqrt[4]{e^2}$ et $\dfrac{\sqrt{e^{30}}}{\sqrt{e^{-42}}}\sqrt[10]{e^{-20}}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^x = 3$.
2. $\ln x = 3$.
3. $e^{2x+3} = 4$.
4. $e^{2x+3} = e$.
5. $\left(e^x - 1\right)\left(e^x - 2\right) = 0$.
6. $e^{2x} + e^x - 3 = 0$.

Activité 6

Soit x un réel positif. Pour tout entier $n>0$, on pose $u_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II. Etude de la fonction exponentielle

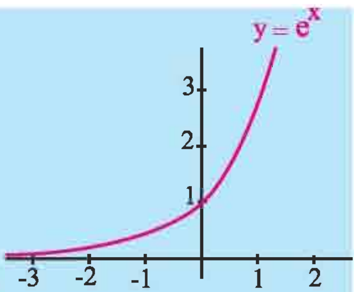
Activité 1

On désigne par C la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$.
2. On pose $X=e^x$.
   a. Montrer que $\frac{e^x}{x}=\frac{X}{\ln X}$
   b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement.
3. a. Justifier la dérivabilité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
   b. Calculer alors $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction exponentielle.
4. Etudier l'intersection de la courbe C avec les axes du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
5. a. Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
   b. Soit la fonction h définie pour tout réel x par $h(x)=e^x-x-1$.
   Etudier les variations de h et en déduire la position relative de (C) par rapport à T.
6. Tracer C et T.

Théorème

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x\mapsto e^x$.
  La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel x, $e^x>0$.



Activité 2

On se propose de déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation $(E): f'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

1. Montrer que la fonction exponentielle vérifie (E).
2. Soit f une fonction qui vérifie (E) et h la fonction définie par $h(x) = e^{-x} f(x)$
   Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $h'(x) = 0$ pour tout réel x.
3. En déduire l'ensemble des fonctions qui vérifient (E).

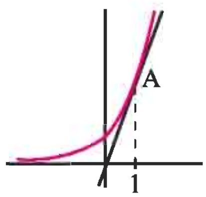
Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{3x} \leq e^{x^2}$.
2. $e^{3x} \leq 4e^{x}$.
3. $e^{x(x-1)} > 1$.

Activité 4

Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction $f : x \mapsto e^{x}$ ainsi qu'une tangente T qui passe par l'origine.



1. Déterminer les coordonnées du point de contact A entre C_f et T.
2. Soit n un entier naturel, montrer que la tangente à C_f au point d'abscisse $(n+1)$ passe par le point de coordonnées $(n, 0)$.

III. Limites usuelles

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.
2. a. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{t}}$
   b. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que C_f admet un point d'inflexion I que l'on précisera.
5. Tracer C_f en précisant la tangente T en I.

Activité 2

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x)=e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

1. Montrer par récurrence sur l'entier naturel n, que pour tout réel $x>0$, $f_n(x)\geq 0$.

2. a. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{nx}}{x^m}=+\infty$.

   b. Calculer $\lim_{x\to-\infty}\left|x^m e^{nx}\right|$.

Théorème

Soit m et n deux entiers naturels non nuls, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{nx}}{x^m}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}x^m e^{nx}=0$.

Activité 2

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-e^{2x}\right)$; $\lim_{x\to+\infty}\left(x^4-x\right)e^x$; $\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{2x}-e^x+1\right)$; $\lim_{x\to-\infty}x\left(e^{2x}-e^x\right)$;

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}$; $\lim_{x\to-\infty}x+1+\frac{1}{e^x+1}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3+1}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-x+1}$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-e^x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. a. Montrer que C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α et que $-1<\alpha<0$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. a. Montrer que C_f admet un point d'inflexion I que l'on précisera.

   b. Ecrire une équation de la tangente à C_f au point I.
4. Tracer C_f.
5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

IV. La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Activité 1

Etudier et représenter la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $h : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $h'(x) = u'(x)e^{u(x)}$, $x \in I$.

Démonstration

On peut écrire pour tout réel x de I, $h(x) = f(u(x))$ avec $f : x \mapsto e^x$ de sorte que $h = f \circ u$.
Le théorème en résulte.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions
$x \mapsto e^{u(x)} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Activité 2

Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous.

$$x \mapsto \sqrt{x}e^{\sqrt{x}},\ x \mapsto (2x+1)e^{-3x},\ x \mapsto \frac{e^{2x}+1}{2e^{2x}+3} \text{ et } x \mapsto x^3e^{3x}.$$

Activité 3

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

$$x \mapsto e^{-3x}\ ;\ x \mapsto xe^{x^2}\ ;\ x \mapsto (2x+1)e^{x^2+x} \text{ et } x \mapsto \sin x\, e^{\cos x}.$$

Activité 4

Calculer les intégrales ci-dessous.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx\ ;\ \int_0^1 xe^{x^2}dx\ ;\ \int_0^1 xe^x dx \text{ et } \int_0^1 xe^{-x+1}dx.$$

Activité 5

1. Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Etudier f et représenter C_f.

2. Montrer que pour $x \geq \frac{1}{2}, x^2 \geq \frac{1}{2}x$.

3. Pour tout réel $\alpha > \frac{1}{2}$, on désigne par $A(\alpha)$ l'aire de la partie limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \frac{1}{2}$.

   a. Montrer que $A(\alpha) \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}x} dx$.

   b. En déduire que la fonction $\alpha \mapsto A(\alpha)$ possède une limite finie L quand α tend vers $+\infty$.

4. Montrer que pour tout réel $\alpha \geq 1$, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-x} dx \leq A(\alpha)$.

5. Donner un encadrement de L.

Activité 6

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. a. Montrer que tout entier naturel n, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$.

3. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \frac{n!}{e}\left[e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right]$.

4. En déduire que $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

V. Exponentielle de base a

Activité 1

1. Calculer les réels $e^{3\ln 2}$, $e^{4\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$, $e^{-2\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$, $e^{-2\ln\sqrt{2}}$.

2. Vérifier que pour tout réel a strictement positif et pour tout entier n, $a^n = e^{n\ln a}$.

Soit un réel $a > 0$. Pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b\ln a}$.

Activité 2

Soit p et q deux entiers tels que $q \geq 2$ et a un réel strictement positif.

Montrer que $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$; $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

$2^x = \frac{1}{2}$, $10^{x+1} = 2^{-x+2}$ et $\left(\sqrt{2}\right)^x = 2^{-x+1}$

Les règles opératoires ci-dessous découlent des propriétés de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle.

Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tous réels c et d,

$$a^{c+d} = a^c \times a^d \ ; \ \left(a^c\right)^d = a^{cd} \ ; \ a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d} \ ; \ a^c \times b^c = (ab)^c \ ; \ \frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c.$$

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit les fonctions $f : x \mapsto e^{x\ln 2}$ et $g : x \mapsto e^{-x\ln 2}$. On note C_f et C_g leurs courbes représentatives.

1. Etudier et représenter la fonction f.
2. Soit un réel a et $A(a, f(a))$ un point de C_f.
   Montrer que le symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées est un point de C_g.
3. Montrer que C_f et C_g sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Définition

Soit un réel $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction $x \mapsto a^x$.

Conséquences

Les résultats ci-dessous découlent de la définition précédente et des propriétés de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle.

Soit un réel $a > 0$. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto (\ln a)a^x$.

La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$.
La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$.
La fonction $x \mapsto 1^x$ est une fonction constante.

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto a^x$.

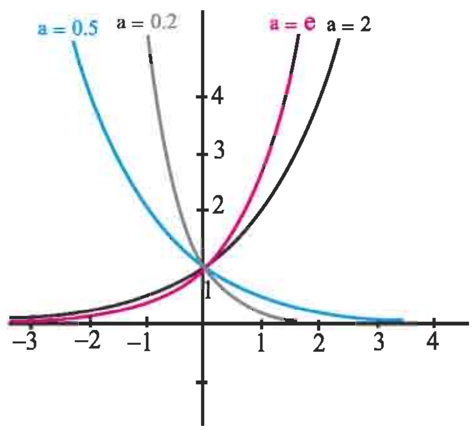
$a > 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$0 < a < 1$

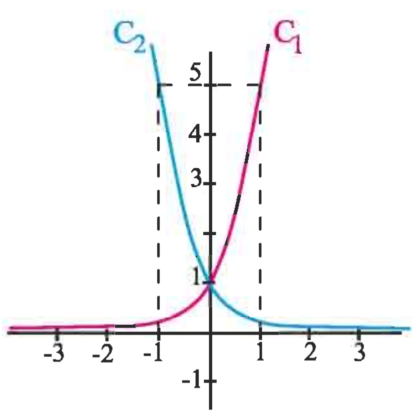
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

Courbes représentatives



Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Le graphique ci-contre représente C_1 et C_2 deux courbes représentatives respectives des fonctions $f_{b_1} : x \mapsto (b_1)^x$ et $f_{b_2} : x \mapsto (b_2)^x$.
Déterminer les réels strictement positifs b_1 et b_2.



Activité 6

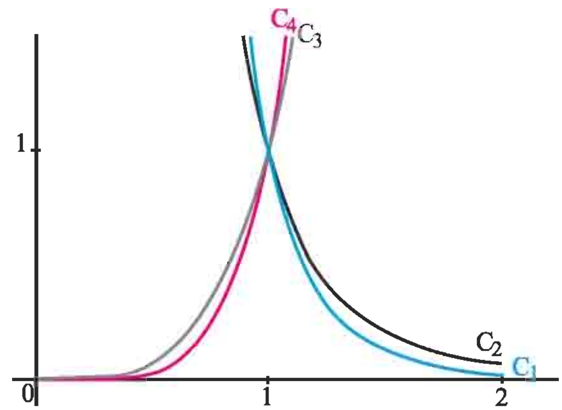
Déterminer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{x^2-2x} \;;\; \lim_{x\to-\infty} 2^{x^2-2x} \;;\; \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x}.$$

VII. Fonctions puissances

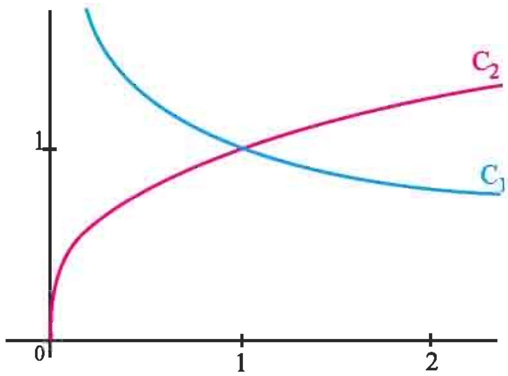
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On a représenté les fonctions
$x \mapsto x^4$; $x \mapsto x^5$; $x \mapsto x^{-4}$; $x \mapsto x^{-5}$, $x > 0$.
Identifier chacune des fonctions.



Activité 2

On a représenté les fonctions
$x \mapsto \sqrt[3]{x}$; $x \mapsto \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$.
Identifier chacune des fonctions.



Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x^3}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = e^{\frac{3}{2}\ln x}$
2. Etudier et représenter f.
3. Montrer que f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer f^{-1}.

Activité 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\geq 2$

Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$.

Notation

Pour tout rationnel r et tout $x>0$, on note $e^{r.\ln x}=x^r$.

Définition

Soit r un rationnel. On appelle fonction puissance r la fonction $x\mapsto e^{r.\ln x}, x>0$.

Les résultats ci-dessous découlent des propriétés des limites des fonctions ln et exp.

Si $r>0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=0$.

Si $r<0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=+\infty$.

Activité 5

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{4}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\frac{4}{3}}$.

Théorème

Soit r un rationnel. La fonction $x\mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x\mapsto r\,x^{r-1}$.

Corollaire

Soit r un rationnel différent de -1. Les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x\mapsto x^r$ sont les fonctions $x\mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}+k,\ k\in\mathbb{R}$.

Activité 6

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{2}{3}} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$ et $g(x)=\begin{cases}x^{\frac{10}{3}} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

1. a. Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

   b. Etudier la dérivabilité de f et g à droite en 0.

2. Etudier et représenter les fonctions f et g.

3. Déterminer l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites $x=1$ et $x=2$.
4. Montrer que les fonctions précédentes sont des bijections strictement croissantes et déterminer leurs fonctions réciproques.

VIII. Croissances comparées

Activité 1

On considère les fonctions $f : x \mapsto (\ln x)^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Etudier le signe de $f'(x)-g'(x)$.
3. Comparer $f(x)$ et $g(x)$.
4. Soit les fonctions $h : x \mapsto x^2$, $t : x \mapsto \sqrt{e^x}$.
   Comparer $h(x)$ et $t(x)$.

Théorème

Soit r un rationnel strictement positif.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \;;\; \lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0 \;;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty .$$

Démonstration

On peut écrire $\frac{\ln x}{x^r} = \frac{1}{r}\frac{\ln x^r}{x^r}$. Il découle alors de $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$.

On démontre de même que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$.

On peut écrire pour tout $x>0$, $\frac{e^x}{x^r} = e^{x - r\ln x}$.

De plus $x - r\ln x = x\left(1 - r\frac{\ln x}{x}\right)$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - r\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - r\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$.

Activité 2

1. Montrer que $(1+x)^{-\frac{3}{4}} \leq x^{-\frac{3}{4}}$, pour tout $x > 0$.

2. Comparer alors $(1+x)^{\frac{1}{4}}$ et $1+x^{\frac{1}{4}}$ pour tout $x > 0$.

Activité 3

Soit un rationnel $r > 0$ et $f : x \mapsto (1+x)^r$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Dans cette question, on suppose que $0 < r < 1$.

Comparer $(1+x)^r$ et $1+rx$.

3. Reprendre la question précédente lorsque $r > 1$.
4. Représenter f lorsque $r = \frac{1}{3}$ puis lorsque $r = \frac{5}{3}$.

Activité 4

1. Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.
2. En déduire les variations de la fonction $g : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.
3. Représenter graphiquement la fonction g.

Exercice résolu 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f en tout réel différent de 0 et de 1.
   b. Etudier la continuité de f en 0 et en 1.
   c. Etudier la dérivabilité de f en 1.
   d. Montrer que f est dérivable à gauche en 0.
2. a. Pour tout x non nul et différent de 1, calculer $\ln(f(x))$ et en déduire $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

   b. Etudier le sens de variation de f.
3. Etudier la limite de $f(x)$, puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter.
4. Dresser le tableau de variation de f puis représenter graphiquement f.

Solution

1. a. La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable en tout réel non nul.

La fonction $x \mapsto \sqrt{|x-1|}$ est dérivable en tout réel différent de 1.

On en déduit que f est dérivable en tout réel non nul et différent de 1.

b. Remarquons que $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x-1|} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to -\infty} e^{X} = 0$,

par suite $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to +\infty} e^{X} = +\infty$. On en déduit que f n'est pas continue en 0.

c. Pour $x \neq 1$ et $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}}}{x-1} = \dfrac{|x-1|e^{\frac{1}{x}}}{(x-1)\sqrt{|x-1|}}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{|x-1|}} = +\infty$, on en déduit que f n'est pas dérivable en 1.

d. Pour $x < 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}}}{x} = \sqrt{|x-1|} \times \left(\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to -\infty} Xe^{X} = 0$.

On en déduit que f est dérivable à gauche en 0, $f'_g(0) = 0$.

2. a. Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $\ln(f(x)) = \ln\left(\sqrt{|x-1|}\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + \dfrac{1}{x}$.

D'après la question 1, la fonction f est dérivable en tout réel non nul différent de 1 et on peut écrire $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (\ln \circ f)'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) - \dfrac{1}{x^2}$.

b. Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $f(x) > 0$ et par suite le signe de $f'(x)$ est celui de $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2-2(x-1)}{2(x-1)x^2} = \frac{x^2-2x+2}{2(x-1)x^2} = \frac{(x-1)^2+1}{2(x-1)x^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2(x-1)x^2$.

f est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et croissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

3. • Remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{|x-1|}=+\infty$, de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x}=1$,

par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

On montre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

• Pour $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x}e^{\frac{1}{x}}$.

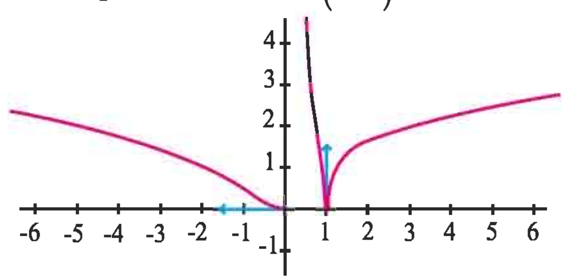
Les égalités $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ impliquent que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

On montre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

C_f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ des branches paraboliques de direction $(O,\vec{i})$.

4.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



Exercice résolu 2

1. a. Montrer $e^{-t}(1+t)\leq 1,\ t\geq 0$.

b. En déduire les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(t)=\dfrac{e^{-t}-1}{t}$.

2. Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt & \text{si } x>0,\\ \ln 2 & \text{si } x=0.\end{cases}$

a. Montrer que $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt+\ln 2,\ x>0$.

b. Montrer que $e^{-x}-1\leq\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\leq\frac{e^{-2x}-1}{2},\ x>0$.

c. En déduire que F est continue sur $[0,+\infty[$.

3. Montrer que $e^{-2x}\ln 2\leq F(x)\leq e^{-x}\ln 2,\ x>0$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

4. Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et préciser $F'_d(0)$.

5. Tracer la courbe représentative de F dans un repère.

Solution

1. a. Soit $t\geq 0$. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=(1+t)e^{-t}-1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t\geq 0$, $f'(t)=e^{-t}-(1+t)e^{-t}=-te^{-t}$.

On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $f(0)=0$. Alors $f(t)\leq 0$ pour tout $t\geq 0$. Le résultat en découle.

b. La fonction $u:t\mapsto\dfrac{e^{-t}-1}{t}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sa fonction dérivée est définie par $u'(t)=\dfrac{1-e^{-t}(t+1)}{t^2}$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question 1. a. $e^{-t}(1+t)\leq 1$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que u est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a. Soit $x>0$. $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt=F(x)-[\ln t]_x^{2x}=F(x)-\ln 2$.

b. La fonction u étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x>0$ et pour tout $t\in[x,2x]$, $u(x)\leq u(t)\leq u(2x)$.

Par conséquent $\displaystyle\int_x^{2x}u(x)dt\leq\int_x^{2x}u(t)dt\leq\int_x^{2x}u(2x)dt$. Le résultat en découle.

c. D'après la question 2. b. $\displaystyle e^{-x}-1\leq\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\leq\frac{e^{-2x}-1}{2}$ pour tout $x>0$.

De plus $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-2x}-1}{2}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}e^{-x}-1=0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt=0$.

Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}F(x)-\ln 2=0$. Il en résulte que f est continue à droite en 0.

Continuité de F sur $]0,+\infty[$

Soit G une primitive de $v:t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. $F(x)=G(2x)-G(x)$.

La fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $2x>0$, on déduit que la fonction $x\mapsto G(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit un réel $x>0$ et t un réel de l'intervalle $[x,2x]$.

$x \leq t \leq 2x$ équivaut à $-2x \leq -t \leq -x$

équivaut à $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$

équivaut à $\dfrac{e^{-2x}}{t} \leq \dfrac{e^{-t}}{t} \leq \dfrac{e^{-x}}{t}$.

Par conséquent $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t}dt \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t}dt$.

De l'égalité $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln 2$ découle $e^{-2x}\ln 2 \leq F(x) \leq e^{-x}\ln 2$. Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

4. **Dérivabilité de F à droite en 0**

D'après 2. b. $\displaystyle e^{-x} - 1 \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t}dt \leq \frac{e^{-2x}-1}{2}$, $x > 0$.

Par conséquent $\dfrac{e^{-x}-1}{x} \leq \dfrac{F(x)-\ln 2}{x} \leq \dfrac{e^{-2x}-1}{2x}$.

Les égalités $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{-2x}-1}{2x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{-x}-1}{x} = -1$ impliquent que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = -1$.

Par suite la fonction F est dérivable à droite en 0 et $F'_d(0) = -1$.

Dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$

On sait que pour $x > 0$, $F(x) = G(2x) - G(x)$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $2x > 0$.

Par suite F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout

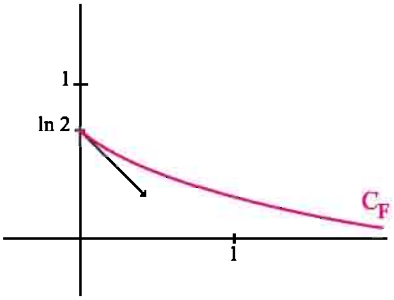
$x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \dfrac{2e^{-2x}}{2x} - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)}{x}$.

5. Pour tout $x > 0$, $e^{-x} - 1 < 0$ d'où $F'(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

Tableau de variation de F

x	0		$+\infty$
F'(x)	−1	−	
F	ln 2	↘	0

Courbe de F



- La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe de F au voisinage de $+\infty$.
- La courbe de F admet au point d'abscisse 0 une demi tangente de coefficient directeur -1.