Chapitre 7

Fonction logarithme népérien

M.Stifel (1544) met en évidence les deux suites

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...	8
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	4	8	16	...	256

Le passage de la ligne inférieure ("in inferiore ordine") à la ligne supérieure ("in superioreordine") transforme les produits en sommes. Par exemple, au lieu de multiplier 8 par 32 "in inferiore ordine", on peut prendre les "logarithmes" correspondants 3 et 5 "in superioreordine", calculer leur somme, qui est 8, retourner "in inferiore ordine", où l'on trouve le produit 8.32=256. Cette table plus détaillée, serait d'une grande utilité, car additionner est plus facile que multiplier. Les premières tables logarithmiques [...] ont été calculées par John Napier (1614, 1619), Henry Briggs (1624) et Jost Burgi (1620).

(E.Haier et al,L'analyse au fil de l'histoire, 2000).

Chapitre 7

Fonction logarithme népérien

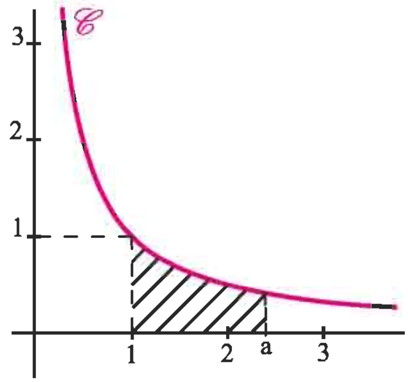
I. Introduction

Activité 1

A/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a construit la courbe de la fonction

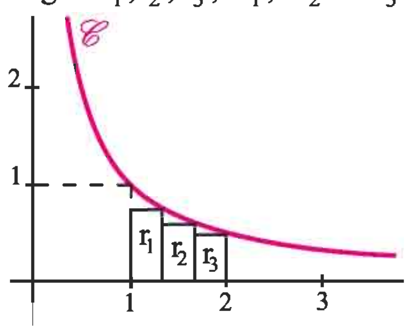
$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

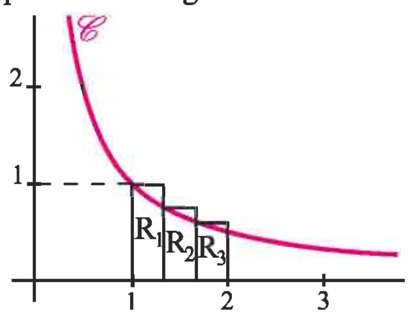
Pour tout réel $a > 0$, on désigne par $S(a)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.



1. Que vaut $S(1)$?

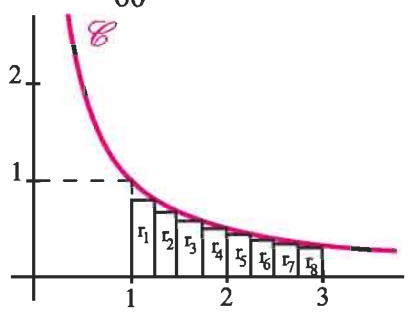
2. a. On partage l'intervalle $[1,2]$ en trois intervalles de même amplitude et on construit les rectangles r_1, r_2, r_3, R_1, R_2 et R_3 comme l'indique les deux figures ci-dessous.





On désigne par $\mathscr{A}$ (respectivement $\mathscr{A}'$) la somme des aires des rectangles r_i (respectivement R_i), $1 \le i \le 3$. Montrer que $\frac{37}{60} \le S(2) \le \frac{47}{60}$.

b. On partage l'intervalle $[1,3]$ en huit intervalles de même amplitude et on construit les rectangles r_i, $1 \le i \le 8$, comme l'indique la figure ci-contre.
Calculer la somme des aires des rectangles r_i, $1 \le i \le 8$ et vérifier que $S(3) \ge 1$.



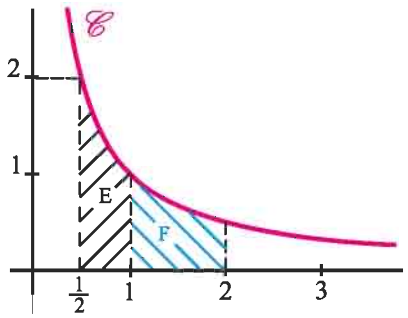
c. Montrer que $S(2.5) \leq 1$.

3. a. Soit $E = \left\{M(x,y) \text{ avec } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$

et $F = \left\{M(x,y) \text{ avec } 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$.

Montrer que E et F ont même aire.

b. En déduire que $S\left(\frac{1}{2}\right) = S(2)$.



B/ Pour tout réel $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

1. a. Montrer que $F(x) > 0$, si et seulement si, $x > 1$.

b. En déduire $F(x)$ à l'aide de $S(x)$.

2. Justifier la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

En déduire que F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel x appartenant à $]2,3[$ tel que $F(x) = 1$.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln, la fonction

$x \mapsto \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$, $x > 0$.

Les résultats suivants découlent immédiatement de la définition précédente.

La fonction logarithme népérien est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, qui s'annule en 1.

La fonction ln est définie, continue, dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\ln 1 = 0$.

Il existe un unique réel x appartenant à $]2,3[$ tel que $\ln(x) = 1$.

Il en résulte que

Soit a et b deux réels strictement positifs.

$\ln a > \ln b$, si et seulement si, $a > b$.

$\ln a = \ln b$, si et seulement si, $a = b$.

$\ln a = 0$, si et seulement si, $a = 1$.

$\ln a > 0$, si et seulement si, $a > 1$.

$\ln a < 0$, si et seulement si, $0 < a < 1$.

Activité 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations ci-dessous.
   a. $\ln\left(x^2+x+1\right)=0.$ b. $\ln(1-x)=\ln(2+x).$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations ci-dessous.
   a. $\ln(4x-1)\leq 0.$ b. $\ln(4-3x)>0.$ c. $\ln\left(x^2+x+1\right)\leq 0.$ d. $\ln(2x-5)\leq \ln x$.

II. Etude et représentation graphique de la fonction ln

Activité 1

On se propose d'étudier la fonction ln et de construire sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a. Soit un entier $n\geq 2$.

   Montrer que $\displaystyle\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{1}{t}dt\geq\frac{1}{2}$ pour $0\leq k\leq n-1$.

   En remarquant que $\displaystyle\int_1^{2^n}\frac{1}{t}dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{1}{t}dt$, en déduire que $\displaystyle\int_1^{2^n}\frac{1}{t}dt\geq\frac{n}{2}$.

   b. En déduire que la fonction ln n'est pas majorée et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln x$.

2. a. Montrer que les deux fonctions $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définies sur $]0,+\infty[$ ont même dérivée.

   b. En déduire que $\ln x=-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x>0$.

   c. Calculer alors $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln x$

3. a. Montrer que $\dfrac{1}{t}\leq\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, pour $t\geq1$. En déduire que $\ln x\leq 2\sqrt{x}-2$, pour $x\geq1$.

   b. Montrer alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$

4. a. Dresser le tableau de variation de la fonction ln.

   b. Ecrire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.

   c. Construire la courbe C.

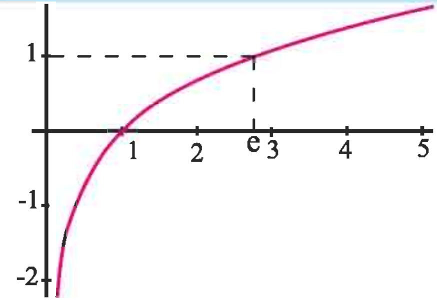
L'activité 1 fournit la démonstration du théorème suivant.

Théorème

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \; ; \; \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \; ; \; \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

- La fonction ln réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
- L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est le réel noté e. Ainsi, $\ln e = 1$.

Les calculatrices donnent des valeurs approchées du réel e, $e \simeq 2.71828...$



Activité 2

On désigne par C la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé.
Soit A un point de C d'abscisse a, la tangente à C en A coupe l'axe des ordonnées en K. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées et par y_H et y_K les ordonnées respectives des points H et K.

1. Montrer que $y_H - y_K$ est constant.
2. En déduire une construction de la tangente en un point de C.

III. Propriétés algébriques

Activité 1

1. On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(ax)$ où a est un réel strictement positif.

   a. Comparer $f'(x)$ et $g'(x)$.

   b. En déduire qu'il existe une constante réelle c telle que $\ln(ax) = \ln x + c,\ x > 0$.

   c. Montrer alors que $\ln(ax) = \ln a + \ln x,\ x > 0$.

2. Montrer que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b,\ a > 0$ et $b > 0$.

Théorème

Soit a et b deux réels strictement positifs.

$\ln(a.b) = \ln a + \ln b$. $\qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$. $\qquad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.

Activité 2

Soit un réel $a > 0$.

1. a. Montrer, par récurrence sur l'entier naturel p, que $\ln(a^p) = p\ln a$.

   b. Montrer que la formule précédente reste encore vraie pour tout entier négatif p.

2. Soit un entier $p \geq 2$. En écrivant $a = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p$, montrer que $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \frac{1}{p}\ln a$.

Théorème

Soit a un réel strictement positif.

- Pour tout entier p, $\ln\left(a^p\right) = p\ln a$
- Pour tout entier $p \geq 2$, $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \frac{1}{p}\ln a$.

Activité 3

1. Exprimer, à l'aide des réels $\ln 2$ et $\ln 3$ chacun des réels ci-dessous.

$\ln\left(\sqrt{3}\right)$, $\ln\left(\sqrt[3]{2}\right)$, $\ln 108$, $\ln\left(\frac{81}{8}\right)$, $\ln\left(\sqrt[5]{2^3}\right)$ et $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{27}}\right)$.

2. Simplifier les écritures ci-dessous.

$\ln\left(\sqrt{e}\right)$, $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$, $\ln\left(e^3\right)$, $\ln\left(e^{-2}\right)$, $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt{e}}\right)$ et $\ln\left(\sqrt[4]{e}.\sqrt[3]{e}\right)$.

3. Soit a et b deux réels strictement positifs. Exprimer à l'aide de $\ln a$ et $\ln b$, les réels

$\ln\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$, $\ln\left(\sqrt{a}.b^2\right)$ et $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

Activité 4

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4}$.

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\sqrt{2}\right)^n \geq 10^5$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations ci-dessous.

$2\ln x = 1$. $(\ln x)^2 + 2\ln x = 3$. $\left(\ln x + \frac{1}{2}\right)(\ln x - 2) = 0$.

$\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$.

$\ln x \geq -2$. $2\ln x < 1$. $(1 - \ln x)(2 - \ln x) \geq 0$.

Activité 6

Déterminer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{3x+4}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln x$.

IV. Autres limites

Activité 1

Soit m un entier naturel non nul et n un entier supérieur ou égal à 2.

1. a. Vérifier que $\dfrac{(\ln x)^n}{x^m}=\left(\dfrac{n}{m}\times\dfrac{\ln\left(\sqrt[n]{x^m}\right)}{\sqrt[n]{x^m}}\right)^n$, $x>0$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^n}{x^m}=0$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\left|x^m(\ln x)^n\right|$

Théorème

Pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^n x}{x^m}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x^m\ln^n x=0$.

Activité 2

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\ln^3 x$, $\lim\limits_{x\to0^+}x^2+\ln^3 x$.

2. $\lim\limits_{x\to0^+}x^4\left(1-\ln^5 x\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\left(1-\ln^5 x\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\ln(3-2x))^2}{4x-6}$.

Activité 3

Soit la fonction f définie par $\begin{cases}f(x)=x^2\ln^2 x,\ x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

1. Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Activité 4

Considérons les réels $a=(2007)^{2008}$ et $b=(2008)^{2007}$.

Comparer a et b (on pourra calculer $\ln a$ et $\ln b$).

V. Fonctions $x\mapsto\ln(u(x))$ et $x\mapsto\ln(|u(x)|)$

Activité 1

Soit la fonction $u:x\mapsto x^2+x-2$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $u(x)>0$.

2. Soit la fonction $f:x\mapsto\ln\left(x^2+x-2\right)$

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

Activité 2

Soit la fonction $u : x \mapsto 1 - x^4$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $|u(x)| > 0$.

En déduire l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(|1 - x^4|)$.

2. Montrer que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et que $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Le théorème de dérivation des fonctions composées fournit la démonstration des théorèmes ci-dessous.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) > 0$, pour tout réel x dans I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x dans I.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout réel x dans I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x dans I.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout réel x dans I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive sur I la fonction

$f : x \mapsto \ln|u(x)| + k$, où k est une constante réelle.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.
3. Déterminer la primitive sur l'intervalle $[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}]$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$,

   qui s'annule en $\dfrac{\pi}{3}$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)+x$

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Etudier la nature des branches infinies de la courbe de f.
3. Tracer la courbe de f.

Activité 5

1. Montrer que $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1)-\ln(x) \leq \frac{1}{x}$, pour tout réel $x>0$.
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$, $n \geq 1$.
   a. Montrer que , $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq v_n \leq \ln(2)$, pour tout entier non nul n.
   b. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

Activité 6

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$, $I=]1,+\infty[$.
2. $f(x)=\frac{x+1}{3x-2}$, $I=]-\infty, \frac{2}{3}[$.
3. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, $I=]\frac{1}{e}, 1[$.
4. $f(x)=\frac{\sin(2x)}{2+\cos^2(x)}$, $I=\mathbb{R}$.
5. $f(x)=\frac{x^2-x+5}{x-1}$, $I=]-\infty,1[$.

Activité 7

Dériver la fonction $x \mapsto x\ln x$

En déduire une primitive de la fonction ln.

Théorème

La fonction $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Activité 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit la fonction $f : x \mapsto 1-x+\ln x$

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe C_f.
2. Soit α un réel de $]0,1[$.
   a. Exprimer à l'aide de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

Activité 9

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$, $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1}$.
2. Calculer alors $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)dt}{t^2}$.

Activité 10

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+2)dx$, $n \geq 1$. Calculer u_1.
2. a. Justifier que pour tout $0 \leq x \leq 1$, $\ln 2 \leq \ln(x+2) \leq \ln 3$.
   b. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\ln 2 \displaystyle\int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq \ln 3 \int_0^1 x^n dx$.
   c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Problème résolu

1. Soit la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \geq 1$. Montrer que la suite (S_n) est divergente.
2. Soit la suite (T_n) définie par $T_n = S_n - \ln(n)$, $n \geq 2$.
   a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \dfrac{1}{x}$.
   b. En déduire que la suite (T_n) est décroissante.
3. Soit la suite (R_n) définie par $R_n = S_{n-1} - \ln(n)$, $n \geq 2$.
   a. Montrer que les suites (T_n) et (R_n) sont adjacentes.
   b. Soit α la limite commune des suites (T_n) et (R_n).
      Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $R_n \leq \alpha \leq T_n$.
   c. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} prés de α.

Solution

1. Soit k un entier non nul.

Pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ par conséquent $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t} dt$.

De l'égalité $\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_{1}^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1)$, on déduit que $S_n \geq \ln(n+1)$.

Par suite $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, car $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

2. a. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème des accroissement finis appliqué sur l'intervalle $[x, x+1]$, $x > 0$ justifie l'existence d'un réel c de $]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}$.

Le réel c est dans $]x, x+1[$, alors $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$.

Le résultat en découle.

b. Pour $n \geq 2$.

$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0$, d'aprés 2.a.

Par conséquent la suite (T_n) est décroissante.

3. a. Soit $n \geq 2$.

$T_n - R_n = \frac{1}{n} \geq 0$. Par suite $R_n \leq T_n$ et $\lim_{n \to +\infty} (R_n - T_n) = 0$.

La suite (T_n) étant décroissante. Il suffit donc de vérifier que la suite (R_n) est croissante.

D'aprés la question 2. a. $R_{n+1} - R_n = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \geq 0$.

Le résultat en découle.

b. La suite (R_n) étant croissante et convergente vers α, alors $R_n \leq \alpha$, $n \geq 2$.

La suite (T_n) étant décroissante et convergente vers α, alors $\alpha \leq T_n$, $n \geq 2$.

On en déduit que $R_n \leq \alpha \leq T_n$, $n \geq 2$.

c. De l'égalité $T_n - R_n = \frac{1}{n}$, on déduit un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} à partir de $n \geq 1000$. Il en découle que T_{1000} et R_{1000} sont des valeurs approchées de α à 10^{-3} prés.

(En utilisant le tableur Excel on obtient $T_{1000} \simeq 0.57771558$ et $R_n \simeq 0.57671558$).