Chapitre 2

Suites réelles

Dans son traité d'Arithmétique, As- Samaw'al (1172) écrit : "Ce que l'on extrait par approximation des racines irrationnelles au moyen du calcul est ce par quoi on veut obtenir une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle. Il peut exister une quantité rationnelle plus proche de la racine irrationnelle que celle-là. Il peut ensuite exister une troisième quantité rationnelle, plus proche de la racine irrationnelle que la deuxième quantité et que la première, car pour toute quantité rationnelle supposée proche d'une racine irrationnelle, la différence entre elles est en vérité une ligne droite, et la ligne est susceptible d'être divisée et d'être partagée, indéfiniment. C'est pourquoi il devient possible de trouver continûment une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle, et de trouver une autre quantité rationnelle plus proche que la première de l'irrationnelle, indéfiniment."

(R. Rashed, Entre Arithmétique et Algèbre , 1984).

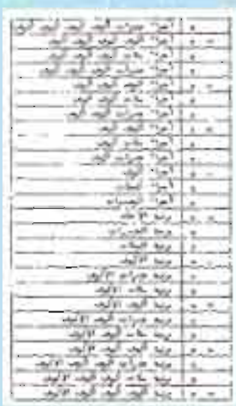


Tableau d'As-Samawal

Chapitre 2

Suites réelles

I. Rappels et compléments sur les limites de suites

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. 2. $u_n = n^2 + 1, n \geq 0$. 3. $u_n = 10^n$, $n \geq 0$.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 10^{2007}, \\ -\frac{n}{3} & \text{si } n > 10^{2007}. \end{cases}$ 2. $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 10^{2007}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } n > 10^{2007}. \end{cases}$

La limite d'une suite (u_n) ne dépend que des grandes valeurs de n.

Activité 3

On désigne par (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{2n+(-1)^n}$, $n \geq 1$.

1. Donner l'expression de u_{2n} et u_{2n+1}.
2. Que peut-on dire de la limite de u_n ?

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, si et seulement si, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = a$.

Démonstration

Supposons d'abord que a est un réel.

Soit (u_n) une suite convergente vers a. Montrons que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers a.

Soit un réel $\beta > 0$. Il existe un entier naturel N_0 tel que $|u_n - a| < \beta$ dès que $n \geq N_0$.

Par suite $|u_{2n} - a| < \beta$ et $|u_{2n+1} - a| < \beta$ dès que $n \geq N_0$.

Supposons que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers a. Montrons que (u_n) est une suite convergente vers a. Posons $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

Soit un réel $\beta > 0$. Il existe deux entiers naturels N_1 et N_2 tels que $|v_n - a| < \beta$ dès que $n \geq N_1$ et $|w_n - a| < \beta$ dès que $n \geq N_2$.

Soit N_0 un entier supérieur à N_1 et N_2 et $m \geq 2N_0 + 1$.

Si $m = 2n$ alors $m \geq N_0 \geq N_1$ et $|u_m - a| = |v_n - a| < \beta$.

Si $m = 2n+1$ alors $m \geq N_0 \geq N_2$ et $|u_m - a| = |w_n - a| < \beta$.

Le cas où a est infini se démontre de façon analogue.

Activité 4

Etudier la convergence des suites ci-dessous.

1. $u_n = (-1)^n$.
2. $u_n = \dfrac{\cos(n\pi) + (-1)^n}{n}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si n est pair,} \\ -\dfrac{n}{3} & \text{si n est impair, } n \geq 1. \end{cases}$

Activité 5

1. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ est bornée.
2. Reprendre la question précédente pour la suite $w_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si n est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{3n^2} & \text{si n est impair, } n \geq 1. \end{cases}$

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Soit (u_n) une suite convergente vers un réel a. Montrons qu'elle est bornée.

Par définition de la convergence d'une suite, il existe un entier N_0 tel que $|u_n - a| < 1$ dès que $n \geq N_0$. Il en découle que $a - 1 < u_n < 1 + a$ dès que $n \geq N_0$.

Si $N_0 = 0$, alors la suite (u_n) est bornée par les réels $a - 1$ et $a + 1$.

Si $N_0 \geq 1$, on désigne par m le plus petit élément de l'ensemble $\{u_0, u_1, ..., u_{N_0 - 1}, a - 1, a + 1\}$ et par M son plus grand élément.

Ainsi la suite (u_n) est bornée par les réels m et M.

Théorème

Soit une suite (u_n) convergente vers un réel a.

- S'il existe un entier N_0 tel que $0 \leq u_n$ pour tout $n \geq N_0$, alors $0 \leq a$.
- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq 0$ pour tout $n \geq N_0$, alors $a \leq 0$.

Démonstration

- On suppose que $a<0$ et on pose $\varepsilon=-\frac{a}{2}$.

Comme la suite (u_n) converge vers a, il existe alors un entier N_1 tel que $|u_n-a|<\varepsilon$ dès que $n\geq N_1$. Il en découle que $a-\varepsilon<u_n<\varepsilon+a$ dès que $n\geq N_1$. Or $\varepsilon+a=\frac{a}{2}<0$, ce qui contredit la positivité de la suite (u_n) à partir du rang N_0.

Ainsi $0\leq a$.

- Pour démontrer la deuxième propriété, il suffit d'appliquer la première à la suite $(-u_n)$.

Conséquence

Soit un entier naturel N_0 et une suite $(u_n), n\geq 0$ .On suppose qu'il existe deux réel m et M tel que $m\leq u_n\leq M$, $n\geq N_0$.

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a, alors $m\leq a\leq M$.

Démonstration

Pour démontrer cette propriété, il suffit d'appliquer le théorème précédent aux suites (u_n-m) et (u_n-M).

Opérations sur les limites de suites

Soit a et b deux réels.

Les résultats qui suivent concernent les opérations sur les limites de suites réelles.

Soit deux suites (u_n) et (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
a	b	$a+b$
$+\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	b	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n.v_n)$
a	b	a b
∞	$b\neq 0$	∞ (on applique la règle des signes)
∞	∞	∞ (on applique la règle des signes)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
a	$b\neq 0$	$\frac{a}{b}$
∞	$b\neq 0$	∞ (on applique la règle des signes)
a	$+\infty$	0
a	$-\infty$	0
$a\neq 0$	0	∞ (on applique la règle des signes)

Activité 6

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}} - 3n^3,\ n \geq 1.$

2. $u_n = \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2}\right)\left(n^3 + 3n - 1\right),\ n \geq 1.$

3. $u_n = -n + \sqrt{\dfrac{5n+3}{2n+9}},\ n \geq 0.$

4. $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n + \dfrac{1}{2}},\ n \geq 0.$

Activité 7

1. On désigne par (u_n) la suite définie par $u_n = 2\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)...\left(1+\dfrac{1}{n}\right),\ n \geq 1.$

   Calculer u_n et déterminer la limite de (u_n).

2. Déterminer alors la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{n^2}$, $n \geq 1$.

II. Suites géométriques et applications

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$, $n \geq 0$.

2. $u_n = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$, $n \geq 0$.

3. $u_n = \left(\sqrt{\pi}\right)^n$, $n \geq 0$.

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = q^n$, $n \geq 0$, où q est un réel non nul.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Activité 2

Soit a un réel et (u_n) la suite définie pour tout entier non nul n par $u_n = \left(\cos(\pi a)\right)^{2n}$.

1. Déterminer la limite de u_n lorsque a est un entier.

2. Déterminer la limite de u_n lorsque a n'est pas un entier.

Activité 3

Soit a un nombre rationnel et (y_n) la suite définie pour tout entier non nul n par

$y_n = (\sin(n!\pi a))^n$.

1. Calculer y_n lorsque a est un rationnel de la forme $\frac{1}{q}$ où $q < n$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ pour tout nombre rationnel a.

Activité 4

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-n^3}$, $n \geq 2$.
2. $u_n = \dfrac{(-2)^n - 3}{4(-2)^n + 5} - 2\left(\dfrac{8}{3}\right)^n$, $n \geq 0$.
3. $u_n = 1 + \dfrac{5}{3} + \ldots + \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$, $n \geq 0$.
4. $u_n = -3 - \dfrac{9}{\pi} - \ldots - 3\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^n$, $n \geq 0$.

Activité 5

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies de la manière suivante

$a_1 = 4.2$, $a_2 = 4.22$, $a_n = 4.\underbrace{22\ldots2}_{\text{n chiffres}}$, $n \geq 1$,

$b_1 = 4.23$, $b_2 = 4.223$, $b_n = 4.\underbrace{22\ldots23}_{\text{n+1 chiffres}}$, $n \geq 1$.

1. En écrivant $a_n = 4.\underbrace{2\ldots22}_{n} = 4 + 2\left(10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-n}\right)$, Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Activité 6

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 2\,u_n - 1,\ n \geq 0. \end{cases}$

1. Déterminer la solution α de l'équation $x = 2x - 1$.
2. On désigne par (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \alpha$, $n \geq 0$.

   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice résolu

Soit la fonction $f : x \mapsto 1+\dfrac{2}{x+1}$.

1. Déterminer les réels x tels que $f(x)=x$.

2. Montrer que pour tous réels x et y différents de -1, $f(x)-f(y)=\dfrac{2(y-x)}{(x+1)(y+1)}$.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, $n\geq 0$.

   a. Montrer que pour tout entier n, u_n est positif.

   b. Représenter la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, ainsi que la droite d'équation $y=x$.

   c. Calculer et représenter les réels u_1, u_2 et u_3 sur l'axe $(O,\vec{i})$.

4. On pose pour tout entier n, $v_n=\dfrac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}$.

   a. A l'aide la question 2, montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

   b. En déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).

Solution

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

   Pour déterminer les points fixes de f, il suffit de résoudre l'équation $f(x)=x$.

   On obtient $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}$ et $f(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}$.

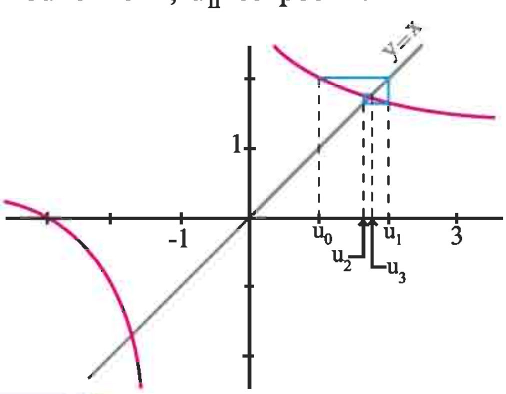
2. Pour tous réels x et y différents de -1, on peut écrire $f(x)-f(y)=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{y+1}$.

   Le résultat en découle.

3. a. Le réel $u_0=1$ est positif. Supposons que u_n est positif. Il en résulte que u_n+1 et $f(u_n)$ sont positifs. Ce qui prouve que pour tout entier n, u_n est positif.

   b. On a représenté ci-contre la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, ainsi que la droite d'équation $y=x$.

   c. Le calcul donne $u_1=2$, $u_2=\dfrac{5}{3}$ et $u_3=\dfrac{7}{4}$.



4. a. On peut écrire pour tout entier n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \dfrac{f(u_n) - f(\sqrt{3})}{f(u_n) - f(-\sqrt{3})}$.

En utilisant la question 2, on obtient $v_{n+1} = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) v_n$.

Ce qui prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$ et de premier terme $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$.

b. La suite (v_n) converge vers 0 car $\left|\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right| < 1$.

On peut écrire pour tout entier n, $u_n = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{3} v_n}{1 - v_n}$.

On en déduit que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{3}$.

III. Suites du type $v_n = f(u_n)$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et (u_n) une suite d'éléments de I.

Si (u_n) tend vers un réel a de I alors $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

Démonstration

Soit un réel $\beta > 0$. Montrons qu'il existe un rang N_0 tel que $|f(u_n) - f(a)| < \beta$ dès que $n \geq N_0$.

La fonction f étant continue en a, il existe un réel α tel que $|f(x) - f(a)| < \beta$ pour tout x de I tel que $|x - a| < \alpha$.

La suite (u_n) étant convergente vers a, il existe un entier naturel N_0 tel que $|u_n - a| < \alpha$ dès que $n \geq N_0$.

Il résulte de ce qui précède que pour tout $n \geq N_0$, on a $|u_n - a| < \alpha$ et par suite $|f(u_n) - f(a)| < \beta$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (fini ou infini) et si $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = L$ (fini ou infini), alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = L$.

Démonstration

- Supposons que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ et f tend vers une limite finie L en $+\infty$.

Soit un réel $\beta > 0$. Montrons qu'il existe un rang N_0 tel que $|f(u_n) - L| < \beta$ dès que $n \geq N_0$.

La fonction f admettant pour limite L en $+\infty$, il existe un réel $B > 0$ tel que $|f(x) - L| < \beta$ pour tout x de I tel que $x > B$.

La suite (u_n) admettant pour limite $+\infty$, il existe un entier naturel N_0 tel que $u_n > B$ dès que $n \geq N_0$.

Il résulte de ce qui précède que pour tout $n \geq N_0$, on a $u_n > B$ et par suite $|f(u_n) - L| < \beta$.

- Supposons que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ et f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Soit un réel $B > 0$. Montrons qu'il existe un rang N_0 tel que $f(u_n) > B$ dès que $n \geq N_0$.

La fonction f admettant pour limite $+\infty$ en $+\infty$, il existe un réel $A > 0$ tel que $f(x) > B$ pour tout x de I tel que $x > A$.

La suite (u_n) admettant pour limite $+\infty$, il existe un entier naturel N_0 tel que $u_n > A$ dès que $n \geq N_0$.

Il résulte de ce qui précède que pour tout $n \geq N_0$, on a $u_n > A$ et par suite $f(u_n) > B$.

Les autres cas se démontrent de façon analogue.

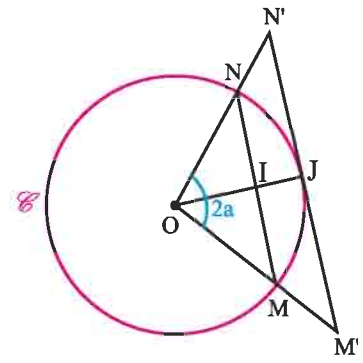
Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \sin\left((0.75)^n\right)$, $n \geq 1$.
2. $u_n = n \sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \tan\left(\dfrac{\pi n}{2n+1}\right)$, $n \geq 0$.
4. $u_n = \dfrac{1 - \cos\left((0.25)^n\right)}{(0.25)^n}$, $n \geq 1$.

Activité 2

1. Dans la figure ci-contre $\mathscr{C}$ est un cercle de rayon 1 et de centre O. Les points M, N de $\mathscr{C}$ sont tels que $\widehat{MON} = 2a$.
Le point I est le milieu du segment [MN].
La demi-droite [OI) coupe $\mathscr{C}$ en J.
La tangente à $\mathscr{C}$ en J coupe respectivement les demi-droites [OM) et [ON) en M' et N'.
On désigne par A et A' les aires des triangles MON et M'ON'.
Montrer que $\dfrac{A'}{A} = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$.

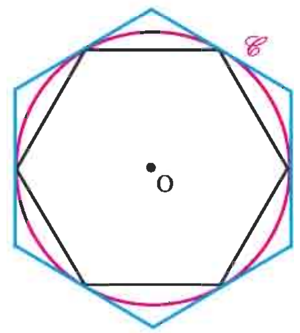


2. Dans la figure ci-contre P_n est un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1 et de centre O et P'_n est un polygone régulier à n côtés circonscrit au cercle $\mathscr{C}$.

On note A_n et A'_n les aires respectives de P_n et P'_n.

a. Exprimer A_n et A'_n à l'aide de n et montrer qu'elles ont une même limite que l'on calculera.

b. Etablir que $2\sqrt{2} < \pi < \dfrac{8\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.



IV. Limites et ordre

Théorème

Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes respectivement vers deux réels a et b.

S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \le v_n$ pour tout $n \ge N_0$ alors $a \le b$.

Démonstration

La suite $(v_n - u_n)$ étant positive, sa limite est alors positive.

Le théorème en découle.

Activité 1

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$, $n \ge 1$.

1. Montrer que pour tout $n \ge 1$, $\dfrac{n^2}{n^2+n} \le v_n \le \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} des réels v_{1000} et v_{10^6}.

3. Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$?

Théorème

Soit trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n). Soit a un réel.

On suppose qu'il existe un entier N_0 tel que $v_n \le u_n \le w_n$, $n \ge N_0$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Démonstration

Nous démontrons le théorème pour $a = 0$. Le cas a non nul en découlera aisément.

Soit un réel $\beta > 0$. Montrons qu'il existe un rang N tel que $|u_n| < \beta$ dès que $n \ge N$.

La suite (v_n) étant convergente vers 0, il existe un entier naturel N_1 tel que $|v_n| < \beta$ dès que $n \ge N_1$, ou encore $-\beta < v_n < \beta$ dès que $n \ge N_1$ (I).

La suite (w_n) étant convergente vers 0, il existe un entier naturel N_2 tel que $|w_n| < \beta$ dès que $n \geq N_2$, ou encore $-\beta < w_n < \beta$ dès que $n \geq N_2$ (II).

Soit un entier naturel N supérieur à N_0, N_1 et N_2.

Il découle de (I) et (II) que $-\beta < v_n < \beta$ et $-\beta < w_n < \beta$ pour tout entier $n \geq N$.

De plus l'hypothèse $v_n \leq u_n \leq w_n$, $n \geq N_0$ implique que $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout entier $n \geq N$.

On en déduit que $-\beta < v_n \leq u_n \leq w_n < \beta$ dès que $n \geq N$,

ou encore que $|u_n| < \beta$ dès que $n \geq N$.

Supposons a non nul. Alors les suites définies par $x_n = u_n - a$, $y_n = v_n - a$ et $z_n = w_n - a$ vérifient $y_n \leq x_n \leq z_n$ pour tout entier $n \geq N_0$ et sont telles que (y_n) et (z_n) convergent vers 0.

On en déduit que la suite (x_n) converge vers 0 et par suite la suite (u_n) converge vers a.

Corollaire

Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n).

On suppose qu'il existe un entier N tel que $0 \leq |u_n| \leq v_n$, $n \geq N$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Activité 2

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n+\cos n}$, $n \geq 0$.

   a. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n-1}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{\cos(5n)+\sin(2n)}{5n^2+1}$, $n \geq 0$.

   a. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq |v_n| \leq \dfrac{2}{5n^2+1}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Activité 3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$.

1. Montrer que $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{10}{11}$ pour tout entier $n \geq 10$.

2. Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer un entier naturel n_0 pour que $|u_n| \leq 10^{-6}$, $n \geq n_0$.

Activité 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{n^{100}}{(1.01)^n}$.

1. Montrer que $(1.01)^n \geq \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-100)10^{-202}}{101!}$, $n \geq 101$,

   (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

2. En déduire la limite de (u_n).

Théorème

Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n).

- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$, $n \geq N_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$, $n \geq N_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

Soit un réel $A > 0$. Montrons qu'il existe un entier N tel que $v_n > A$ dès que $n \geq N$.

L'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ nous permet d'affirmer qu'il existe un entier N_1 tel que

$u_n > A$ dès que $n > N_1$ (I).

Soit N un entier supérieur à N_0 et N_1. On déduit de (I) que $u_n > A$ dés que $n > N > N_1$.

L'hypothèse $v_n \geq u_n$, $n \geq N_0$ nous permet alors d'écrire $v_n \geq u_n > A$ pour tout entier $n > N$.

Ce qui démontre la première propriété du théorème.

Pour démontrer la deuxième propriété, il suffit d'appliquer la première propriété aux suites $(-u_n)$ et $(-v_n)$.

Activité 5

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = (3n+1)^n$, $n \geq 1$.
2. $u_n = \dfrac{n^3}{2+\sin(3n)}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \dfrac{1}{n^2} + n^3(\sin n - 3)$, $n \geq 1$.
4. $u_n = -\dfrac{n^6}{n^4-\pi} + \dfrac{\cos^2(2n)}{n^3}$, $n \geq 1$.

Activité 6

1. Ecrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$.

a. $A = 1+2+3+...+n$.

b. $B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...-\frac{1}{512}$.

2. Calculer les sommes suivantes.

$C = \sum_{k=10}^{500} 1$; $D = \sum_{k=0}^{20} (3k-1)$; $E = \sum_{k=3}^{10} 10^{-k}$.

On note $\sum_{k=1}^{n} a_k$ et on lit «sigma pour k variant de 1 à n des réels a_k» le réel obtenu en faisant la somme des réels $a_1, a_2, ..., a_n$.

On a donc $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Activité 7

1. Vérifier que pour tout entier non nul k, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2. En déduire la limite de la suite (w_n) définie par $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $n \geq 1$.

V. Convergence des suites monotones

Activité 1

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}$, $n \geq 1$.

1. a. Calculer w_n .

b. Vérifier que la suite (w_n) est décroissante et minorée.

c. Montrer que (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + ... + \frac{n}{n}$, $n \geq 1$.

a. Vérifier que la suite (v_n) est croissante.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Théorème (admis)

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 0$.

Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel a et pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq a$.

Si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel b et pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq b$.

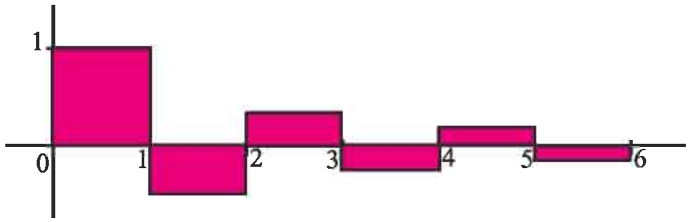
Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On construit une suite de rectangles et on note algébriquement leurs aires de la manière suivante.

Le $n^{\text{ème}}$ rectangle est limité par les droites d'équations $y=0$, $y=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$,

$x=n-1$ et $x=n$, son aire algébrique est $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ci-contre on a représenté les six premiers rectangles.
Pour tout $n \geq 1$, on désigne par u_n la somme des aires algébriques des n premiers rectangles



1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_6.

   b. Vérifier que $u_n = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots-\dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$.

2. a. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante.

   b. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} \leq 1-\dfrac{1}{2n}$.

   c. En déduire que la suite (u_{2n}) converge vers un réel a.

3. a. Montrer que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

   b. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_{2n+1} \geq 0.5+\dfrac{1}{2n+1}$.

4. Calculer $u_{2n+1}-u_{2n}$.

   En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite a.

5. a. Montrer alors que la suite (u_n) converge vers a.

   b. Calculer u_{10} et u_{11} et en déduire un encadrement de a.

Théorème

- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration

- Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) étant non majorée, on en déduit que pour tout réel $M>0$ il existe un entier naturel N_0 tel que $u_{N_0} > M$.

La suite (u_n) étant croissante, on en déduit que $u_n > M$ pour tout $n \geq N_0$.

Ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

• Si (u_n) est une suite décroissante et non minorée, alors la suite $(-u_n)$ est croissante et non majorée.

On déduit de la première propriété que $\lim\limits_{n \to +\infty} -u_n = +\infty$.

Ce qui implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Activité 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est non majorée.
4. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

VI. Suites récurrentes

Théorème

Soit une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$ où f est une fonction.

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a et si la fonction f est continue en a alors $a = f(a)$.

Démonstration

Il est clair que si la suite (u_n) converge vers un réel a, alors la suite (u_{n+1}) converge aussi vers a.

De plus, f étant continue en a, alors $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$, et par unicité de la limite il vient alors que $a = f(a)$.

Activité 1

Soit la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ...

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
2. a. Montrer que a_1 est irrationnel.

   b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, a_n est irrationnel.

3. Montrer que la suite (a_n) est croissante et majorée par 2.
4. Déterminer sa limite.

Activité 2

Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante et majorée par 2.
2. Déterminer sa limite.

VII. Suites adjacentes

Définition et théorème

Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions

- pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n$,
- la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante,
- la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Dans ce cas les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Démonstration

La suite (v_n) étant décroissante, il vient que $u_n \leq v_n \leq v_0$, $n \geq 0$.

D'où la suite (u_n) est majorée par v_0. De plus elle est croissante, on en déduit qu'elle converge vers un réel a.

De même la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0.

Donc la suite (v_n) converge vers un réel b.

En écrivant $v_n = (v_n - u_n) + u_n$, $n \geq 0$, et en passant à la limite, on obtient $b = a$.

Ainsi les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Activité 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et majorée.
2. Montrer que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel α.
4. a. Vérifier que $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$.

   b. Calculer u_4 et u_5 et donner un encadrement de α.

   c. A l'aide de la calculatrice, déterminer un entier n permettant d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-8}.

Activité 2

Soit les deux suites (u_n) et (v_n) définies par

$u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

1. a. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique que l'on déterminera.

   b. En déduire que pour tout n, $u_n \leq v_n$

   c. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   d. Vérifier alors que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite α.
2. Montrer que la suite $(v_n + u_n)$ est une suite constante que l'on déterminera.
3. Déterminer u_n et v_n en fonction de n.
4. Calculer α.

Problème corrigé

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n.n!}, \; n \geq 1.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que la suite (v_n) est strictement décroissante.
2. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

   On désigne par e leur limite commune.
3. On se propose de montrer que e est un irrationnel.

   a. Justifier que $e > 0$ et que $u_n < e < v_n$, $n \geq 1$.

   b. On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $e = \frac{p}{q}$.

   Montrer qu'il existe un entier naturel non nul a tel que $u_q = \frac{a}{q!}$.

   En déduire que $a < p(q-1)! < a+1$.

   c. Conclure que e est un irrationnel.

Solution

1. L'égalité $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ implique que la suite (u_n) est strictement croissante.

   Le calcul donne $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$.

   Il en résulte que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

2. Remarquons que pour tout $n \geq 1$, $u_n - v_n = -\frac{1}{n.n!}$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{n.n!}\right) = 0$.

   On en déduit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, par conséquent elles convergent vers la même limite.

3. a. La suite (u_n) étant strictement croissante et convergente vers e, elle est majorée par e.
   Montrons que pour tout $n \geq 1$, $u_n \neq e$.
   Supposons qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $u_{n_0} = e$.
   Il en résulte que pour tout entier $m > n_0$, $u_m \leq e$ et $u_m \geq u_{n_0}$.
   Par conséquent $u_m = e$, ce qui contredit l'hypothèse (u_n) est strictement croissante.
   En conclusion, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n < e$.
   La suite (v_n) étant strictement décroissante et convergente vers e, elle est minorée par e.
   Montrons que pour tout $n \geq 1$, $v_n \neq e$.
   Supposons qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $v_{n_0} = e$.
   Il en résulte que pour tout entier $m > n_0$, $v_m \geq e$ et $v_m \leq v_{n_0}$.
   Par conséquent $v_m = e$, ce qui contredit l'hypothèse (v_n) est strictement décroissante.

   b. En réduisant au même dénominateur dans $u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$, on obtient $u_q = \frac{a}{q!}$ où a est un entier naturel non nul.
   Pour tout $n \geq 1$, $u_n < e < v_n$. En particulier, $u_q < e < v_q$.
   Il en résulte que $\frac{a}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{a}{q!} + \frac{1}{q.q!}$, ou encore $a < p.(q-1)! < a + \frac{1}{q} \leq a+1$.

   c. Le résultat $a < p.(q-1)! < a + \frac{1}{q} \leq a+1$ est en contradiction avec l'hypothèse a et $p.(q-1)!$ sont des entiers naturels non nuls.

   Par suite, pour tous entiers naturels p et q, $e \neq \frac{p}{q}$.