Chapitre 5

Primitives

" Nous appellerons la fonction fx, fonction primitive, par rapport aux fonctions f'x, f''x, &c.qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, fonctions dérivées, par rapport à celle-là"

(Lagrange, 1797)
(Cité dans E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000)

Chapitre 5

Primitives

I. Définition

Activité 1

Soit les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+4x-1$ et $F(x)=x^3+2x^2-x+2$.

Vérifier que $F'=f$.

Déterminer une fonction G dérivable sur $\mathbb{R}$ et distincte de F telle que $G'=f$.

Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$, pour tout x de I.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $F(x)=\frac{1}{x}$; $f(x)=-\frac{1}{x^2}$; $I=[1,+\infty[$.
2. $F(x)=x^2$; $f(x)=2x$; $I=\mathbb{R}$.
3. $F(x)=\tan x$; $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$; $I=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Théorème (admis)

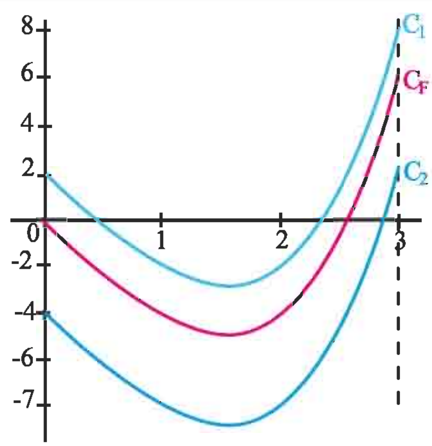
Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté la courbe C_F de la fonction F définie sur $[0, 3]$ par

$F(x)= x^3-x^2-4x$.

Les courbes C_1, C_2 sont les images respectives de C_F par des translations de vecteurs colinéaires à $\vec{j}$.



On désigne par G_1, G_2 les fonctions de courbes respectives C_1, C_2.

1. Déterminer la dérivée f de F. Que représente F pour f ?
2. Déterminer G_1, G_2 .
3. Soit H une primitive de f sur $[0, 3]$. Justifier que la courbe de H est l'image de celle de F par une translation.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors la fonction $F-G$ est constante sur I.

Démonstration

Les fonctions F et G étant des primitives de f sur I, il en résulte que $F'(x)-G'(x)=0$, pour tout x de I. Ce qui implique que $F-G$ est constante sur I.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel. Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.

Démonstration

L'unicité découle du théorème précédent.
D'autre part, soit G une primitive de f sur I.
La fonction F définie sur I par $F(x)=G(x)-G(x_0)+y_0$ est la primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

Activité 4

On considère les fonctions f, g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{(x+2)^2} \; ; \; g: x \mapsto \sin x+\cos x \; ; \; h: x \mapsto \sin x-\cos x .$$

Identifier parmi les fonctions suivantes celles qui sont des primitives sur $]0, +\infty[$ de l'une des fonctions précédentes.

$$F_1: x \mapsto 2\sqrt{x}-\frac{2}{x+2}-4 \; ; \; F_2: x \mapsto \pi-\sin x-\cos x \; ; \; F_3: x \mapsto -\sin x-\cos x-1 \; ;$$

$$F_4: x \mapsto \sin x-\cos x+\pi \; ; \; F_5: x \mapsto \sin x-\cos x .$$

Activité 5

Soit F et f les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2$ et $f(x)=\sqrt{x}-x$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la primitive G de f sur $]0, +\infty[$ telle que $G(1)=2$.

II. Primitives des fonctions usuelles et opérations

Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur l'intervalle I et a, c, ω et φ des réels avec $\omega \neq 0$.

f	I	F
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$	$]0, +\infty[$ (ou $]-\infty, 0[$)	$x \mapsto \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$	$x \mapsto \tan x + c$

Le théorème ci-dessous découle des opérations sur les fonctions dérivables.

Théorème

Soit F et G deux primitives respectives de deux fonctions f et g sur un intervalle I.
- La fonction $F + G$ est une primitive sur I de $f + g$.
- Soit λ un réel. La fonction λF est une primitive sur I de λf.

Activité 1

Déterminer, dans chaque cas, une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto -2x^2 + 3x$, $\quad I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto -\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $\quad I =]0, +\infty[$.
3. $f : x \mapsto -2\cos x + 5\sin x$, $\quad I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto \cos(-2x) + \sin(5x)$, $\quad I = \mathbb{R}$.

5. $f : x \mapsto \tan^2(x)$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

6. $f : x \mapsto \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$, $I = [-3, -1]$.

Activité 2

La quantité d'une substance chimique produite au cours des dix premières secondes d'une expérience a été de 12g. Au bout de t secondes du début de l'expérience, le taux de production instantané (en g/s) de cette substance a été de $Q'(t) = \frac{40}{t^2} + \frac{200}{t^3}$, $t \geq 10$.

1. Déterminer la fonction Q qui à tout $t \geq 10$ associe la quantité $Q(t)$ produite au bout de t secondes.
2. Tracer dans un repère la courbe de la fonction Q.
3. Peut-on avoir 20 g de quantité produite ? Pourquoi ?

III. Calcul de primitives

Dans le tableau suivant F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I et u et v désignent deux fonctions dérivables sur I.

f	Condition	F
$u'u^n$, n entier naturel non nul		$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'v + v'u$		$u.v$
$\frac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	u ne s'annule pas sur I	$\frac{u^{-n+1}}{-n+1}$
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I	$\frac{u}{v}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	u strictement positive sur I	$2\sqrt{u}$
$u'\sqrt{u}$	u positive sur I	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$
$u'\sqrt[n]{u^{1-n}}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	u est strictement positive sur I	$n\sqrt[n]{u}$
$u'(w' \circ u)$	w une fonction dérivable sur $u(I)$	$w \circ u$

Activité 1

Vérifier dans chaque cas que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F telle que $F\left(x_0\right)=y_0$.

1. $f : x \mapsto (2x-1)\left(x^2-x+3\right)$, $\quad I=\mathbb{R}$, $\quad x_0=1$ et $y_0=2$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{6x-1}{(3x^2-x)^2}$, $\quad I=]1,+\infty[$, $\quad x_0=2$ et $y_0=0$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\tan^3 x}{\cos^2 x}$, $\quad I=]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, $\quad x_0=-\dfrac{\pi}{4}$ et $y_0=-1$.
4. $f : x \mapsto 2x\sqrt{x}+\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$, $\quad I=]0,+\infty[$, $\quad x_0=1$ et $y_0=-1$.
5. $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$, $\quad I=]-\infty,2]$, $\quad x_0=1$ et $y_0=0$.

Activité 2

Un physicien étudie le mouvement d'une particule.
La vitesse initiale de la particule est de 3m/s et t secondes après le début de l'expérience, son accélération (en cm/s²) est de $a(t)=1-\dfrac{1}{2\left(\sqrt{t+1}\right)^3}$.

1. Déterminer la vitesse de la particule t secondes après le début de l'expérience.
2. Déterminer la distance parcourue par la particule t secondes après le début de l'expérience.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^3-11x^2+20x-10}{(x-2)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-2)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]2,+\infty[$.

Activité 4

1. Soit f la fonction telle que $f(x)=\sin^2 x$.

Utiliser l'égalité $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ pour déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sin^3 x$.

Utiliser l'égalité $\sin^3 x=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)$ pour déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos^2 x$.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

Exercice résolu

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Etudier f et tracer C_f.

   b. En déduire que pour tout réel t de $[0,+\infty[$, $\dfrac{2}{3}\leq f(t)\leq 1$.

2. Soit F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

   a. Montrer que pour tout réel x de $[0,+\infty[$ on a $\dfrac{2}{3}x\leq F(x)\leq x$.

   b. En déduire la limite de F en $+\infty$.

   c. Dresser le tableau de variation de F.

3. Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $G(x)=F(x^2)$.

   a. Montrer que G est dérivable à droite en 0.

   b. Etudier les variations de G sur $[0,+\infty[$.

   c. Donner l'allure de la courbe de G dans un autre orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Solution

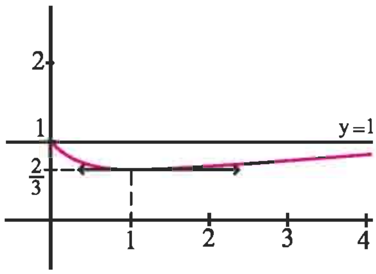
1. a. La fonction f est une fonction rationnelle et $1+x+x^2\neq 0$ pour tout réel x, donc f est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$.

   Le calcul donne $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{\left(1+x+x^2\right)^2}, x\geq 0$.

Tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f	1	↘	$\frac{2}{3}$	↗	1

Courbe de f



   b. D'après le tableau de variation de f, $\dfrac{2}{3}\leq f(t)\leq 1$, $t\in[0,+\infty[$.

2. a. La fonction F est une primitive de f sur $[0,+\infty[$, elle est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $F'(t)=f(t)$, $t\geq 0$.

   De la question 1. b on déduit que $\dfrac{2}{3}\leq F'(t)\leq 1$, $t\geq 0$.

On applique le théorème des inégalités des accroissements finis sur $[0, x]$, $x \geq 0$.
Le résultat en découle.

b. Pour tout réel x de $[0,+\infty[$,

$\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

x	0		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
F	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $\frac{G(x)}{x} = \frac{F(x^2)}{x}$. De plus, $\frac{2}{3}x^2 \leq F(x^2) \leq x^2$.

Il en résulte que $\frac{2}{3}x \leq \frac{F(x^2)}{x} \leq x$, $x \in]0,+\infty[$ et par suite $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{F(x^2)}{x} = 0$.

On conclut que G est dérivable à droite en 0 et $G'_d(0) = 0$.

b. La fonction $G = F \circ u$ avec $u : x \mapsto x^2$.
Les fonctions F et u sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et $u([0,+\infty[) = [0,+\infty[$.
Il en résulte que la fonction G est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $G'(x) = f(x^2).2x$

x	0		$+\infty$
$G'(x)$	0	$+$	
G	0	$\nearrow$	$+\infty$

c. Etude de la branche infinie en $+\infty$.

$\frac{2}{3}x \leq \frac{G(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty$.

La courbe de G admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.