Chapitre 6

Intégrales

La parabole considérée par Thabit Ibn Qurra est définie par une propriété que nous traduisons aujourd'hui par l'équation $y^2=px$ et la quadrature de la parabole est équivalente à notre calcul de l'intégrale $\int_0^a \sqrt{px}$.

Mais le calcul immédiat d'une telle intégrale, [...], aurait exigé la sommation de [...] $\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}$.

Ibn Qurra étudie cette difficulté en recourant à un artifice astucieux. [...].

(AP. Youschkevitch, Les mathématiquesarabes, 1976).

Thabit Ibn Qurra est un mathématicien arabe qui vécut au Xe siècle

Chapitre 6

Intégrales

I. Définition

I.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Activité 1

Le plan étant muni d'un repère orthogonal. $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'unité d'aire, notée par u.a est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère la fonction g définie par

$$g(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{si } x<-2,\\ 1 & \text{si } -2\le x\le 1,\\ 3x-2 & \text{si } x>1.\end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de g.
2. Hachurer la partie $\mathcal{P}$ du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de g et les droites d'équations $x=-3$ et $x=3.5$.
3. Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $[-1,\ 1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C_f de f et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

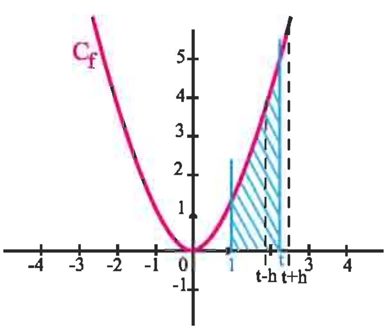
1. Représenter la courbe C_f.
2. Calculer $\mathcal{A}$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.

On a tracé ci-contre la courbe C_f de f.



Soit $t\in[1,+\infty[$ et $\mathcal{A}(t)$ l'aire de la partie limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=t$.

On se propose de déterminer $\mathcal{A}(t)$ pour tout $t\in[1,+\infty[$.

On désigne par $\mathcal{A}$ la fonction $t\mapsto\mathcal{A}(t)$.

1. Que vaut $\mathcal{A}(1)$?
2. Soit $h>0$.
   a. Montrer que $hf(t)\le\mathcal{A}(t+h)-\mathcal{A}(t)\le hf(t+h)$.

b. En déduire que la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable à droite en t et que $\mathcal{A}'_d(t)=f(t)$.

3. Soit $t\in]1,+\infty[$ et $1<t-h<t$.
   a. Montrer que $hf(t-h)\leq\mathcal{A}(t)-\mathcal{A}(t-h)\leq hf(t)$.
   b. En déduire que la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable à gauche en t et que $\mathcal{A}'_g(t)=f(t)$.
4. a. Montrer que $\mathcal{A}(t)-\mathcal{A}(1)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{3}$, $t\geq1$.
   b. Quelle est l'aire de la partie limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$?
5. Soit F une primitive de f sur $[1,+\infty[$. Montrer que $F(t)-F(1)=\mathcal{A}(t)-\mathcal{A}(1)$, $t\geq1$.

Propriété

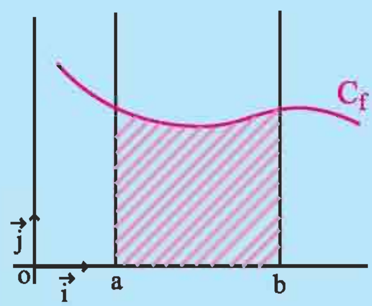
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous a et b de I, $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$.

Démonstration

Les fonctions F et G étant des primitives de f sur I, la fonction $F-G$ est constante sur I. On en déduit que pour tous réels a et b de I, $F(b)-G(b)=F(a)-G(a)$. La propriété en découle.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est le réel $F(b)-F(a)$.
Le réel $F(b)-F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b et est noté $\int_a^b f(x)dx$.



Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère la fonction $f:x\mapsto x^3-x$.
1. Représenter la partie $\mathcal{P}$ du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
2. Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.

I.2 Intégrale d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I.

On appelle intégrale de f entre a et b le réel, noté $\int_a^b f(x)dx$, défini

par $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Vocabulaire et notations

- Le réel $\int_a^b f(x)dx$ est appelé intégrale de f sur $[a,b]$, ou encore de a à b, ou encore entre a et b.
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle lettre et on peut écrire $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$. On dit que x est une variable muette.
- Pour toute primitive F de f, on écrit $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.

L'expression $[F(x)]_a^b$ se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».

Activité 1

Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x^4-1)dx$, $\int_0^1 \sin(\pi x)dx$, $\int_{-1}^{1}\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$.

Activité 2

1. Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.
2. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe de $-f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
3. En déduire que l'aire de la partie limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ est égale à $\int_1^2 -f(x)dx$.

II. Propriétés algébriques de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c des réels de I. Alors

$\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (Relation de Chasles).

Démonstration

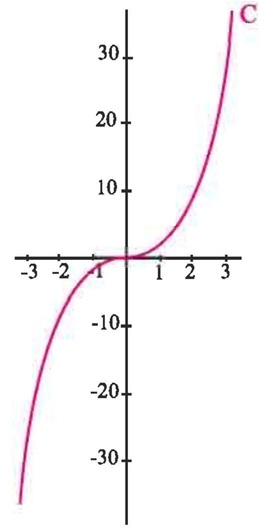
Soit F une primitive de f sur I.

$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$.

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$.

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Activité 1



Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe C de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Tracer la courbe C' représentative de $|f|$.

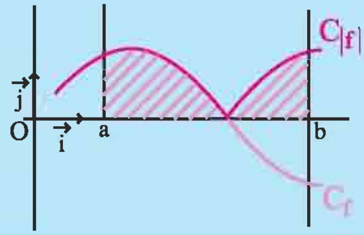
2. a. Représenter la partie P' du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C' et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.

   b. Calculer l'aire de P'.

3. En déduire l'aire la partie P du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b |f(x)| dx$.



Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Calculer, dans chacun des cas ci-dessous, l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

1. $f : x \mapsto \sin(2x)$, $a = -\frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$.

2. $f : x \mapsto \frac{x}{\left(x^2+1\right)^4}$, $a = -2$ et $b = 1$.

Théorème (linéarité)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

Pour tous réels α et β, $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.

Démonstration

Soit F et G deux primitives respectives de f et g sur $[a,b]$. Alors pour tous réels α et β, $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$ sur $[a,b]$. On peut écrire

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx &= (\alpha F(b)+\beta G(b))-(\alpha F(a)+\beta G(a))\\ &= \alpha(F(b)-F(a))+\beta(G(b)-G(a))\\ &= \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

Activité 3

Calculer $\int_1^2 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx + \int_1^2 \frac{2x+1}{(x+1)^2}dx$.

Activité 4

Soit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2}dx$

1. Calculer $I+2J$ et $2J-I$.
2. En déduire les valeurs de I et J.

III. Intégrales et inégalités

Théorème (positivité)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Démonstration

Toute primitive sur $[a,b]$ d'une fonction positive est croissante sur $[a, b]$.
Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ où $a<b$. Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx>0$.

Démonstration

Toute primitive sur $[a,b]$ d'une fonction positive qui ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a,b]$ est strictement croissante sur $[a,b]$. Le corollaire en découle.

Activité 1

1. Montrer que $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} > \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx$.
2. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2+x^3+x^4)dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x}$.

Corollaire (comparaison)

Soit f, g et h trois fonctions continues sur $[a,b]$.

Si $h \le f \le g$, alors $\int_a^b h(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration

La fonction $f-h$ étant positive sur $[a,b]$, il résulte de la positivité de l'intégrale que $\int_a^b (f(x)-h(x))dx \ge 0$, ou encore que $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b h(x)dx$.

On montre de même que $\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$.

Corollaire

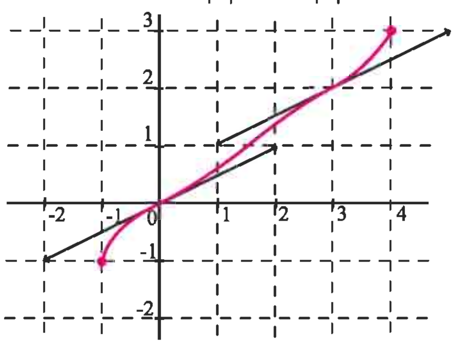
Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Démonstration

La propriété découle du corollaire précédent et de la double inégalité $-|f| \le f \le |f|$.

Activité 2

On a représenté une fonction f dérivable sur $[-1,4]$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 0 et 3.



1. Vérifier graphiquement que pour tout réel x de $[0,3]$, $\frac{x}{2} \le f(x) \le \frac{x+1}{2}$.
2. En déduire que $\frac{9}{4} \le \int_0^3 f(x)dx \le \frac{15}{4}$.

Activité 3

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx$.

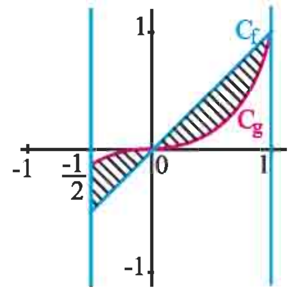
1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout x de $[0,1]$, $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq x^{n+1}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+2}$.
3. a. Donner une valeur approchée de u_{100} et préciser l'erreur commise.

   b. Donner une valeur approchée de u_{10000} et préciser l'erreur commise.

Activité 4

On a tracé ci-contre les courbes des fonctions f et g définies sur $[-\frac{1}{2}, 1]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$.

On se propose de calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$.



1. a. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   b. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   c. En déduire l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
2. Calculer l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.
3. Conclure.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, la courbe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

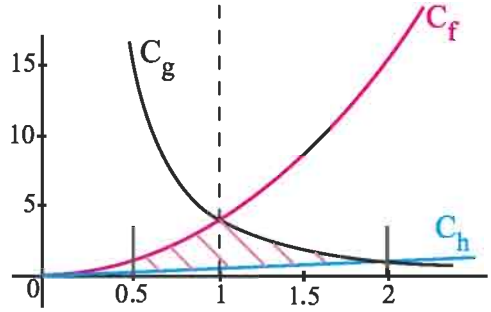
Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f et g les fonctions définies sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$.

1. Représenter les courbes C_f et C_g de f et g sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Etudier le signe de $f-g$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations, $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$.

Activité 6



Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a représenté les courbes C_f et C_h des fonctions f et h définies sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=4x^2$ et $h(x)=\frac{x}{2}$ et la courbe C_g de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{4}{x^2}$.

On se propose de calculer l'aire de la partie $\mathcal{D}$ limitée par ces trois courbes et les droites d'équations $x=0.5$ et $x=2$.

1. Résoudre les équations $f(x)=g(x)$ et $g(x)=h(x)$.
2. Calculer l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_h et les droites d'équations $x=0.5$ et $x=1$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_g et C_h et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
4. En déduire l'aire de $\mathcal{D}$.

IV. Calculs d'intégrales

IV. 1 Calcul au moyen d'une primitive

Activité 1

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^3 (5x^4-x^3-2)dx \ ; \ \int_{-2}^{-1}\frac{1}{t^2}dt \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx \ ; \ \int_{-1}^{2}(3x^2+1)(x^3+x-2)dx \ ;$$

$$\int_0^1 \frac{-2u}{(u^2+2)^3}du \ ; \ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{\sin^3 t}dt, \ \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx.$$

Activité 2

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x}\,dx$.

IV. 2 Intégration par parties

Théorème d'intégration par parties

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ et telles que leurs dérivées f' et g' sont continues sur $[a,b]$. Alors
$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$.

Démonstration

On sait que $(fg)' = f'g + g'f$. La continuité des fonctions f' et g' sur $[a,b]$ nous permet d'écrire que $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + g'(x)f(x))dx = [f(x)g(x)]_a^b$.

Le théorème en résulte.

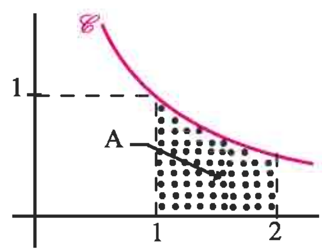
Activité

Calculer les intégrales suivantes.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$.

IV. 3 Calcul approché d'intégrales (Méthode des rectangles)

Activité



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

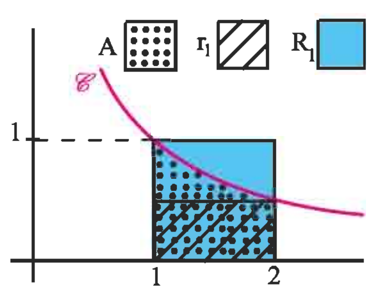
On désigne par A l'aire (en u.a) de la partie limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

1. Vérifier que $A = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

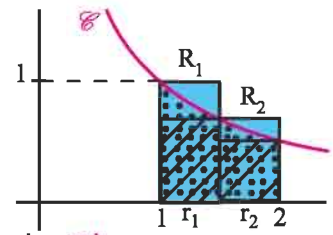
On se propose de donner des encadrements de A.

2. On trace les rectangles r_1 et R_1 comme l'indique le schéma ci-contre.

   Vérifier que $\frac{1}{2} \le A \le 1$.

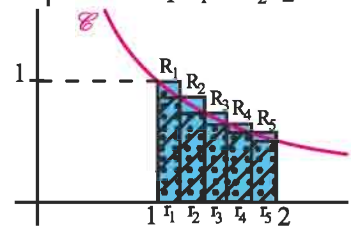


3. On partage l'intervalle $[1,2]$ en deux intervalles de longueur 0.5.
On trace les rectangles r_1, r_2 et R_1, R_2 Comme l'indique la figure ci-contre. Vérifier que $\frac{7}{12} \leq A \leq \frac{5}{6}$.



4. On partage l'intervalle $[1,2]$ en 5 intervalles, de longueur $\frac{1}{5}$.

On trace les rectangles r_i et les rectangles R_i , $1 \leq i \leq 5$.
comme l'indique la figure ci-contre.
Donner un nouvel encadrement de A.



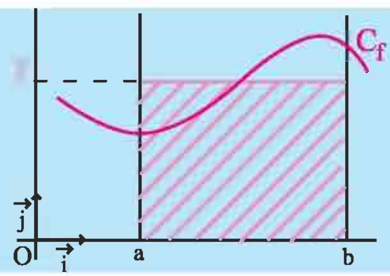
IV. 4 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a < b)$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel, noté $\overline{f}$, défini par $\overline{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$.

Interprétation géométrique de la valeur moyenne

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, les droites d'équations, $x = a$, $x = b$ et $y = 0$ est égale à celle du rectangle de côtés $(b-a)$ et $\overline{f}$.



Activité 1

Soit la fonction définie sur $[0,2]$, par $f(x) = 3x - 1$.
Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,2]$, puis la comparer à f(1).

Activité 2

Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, par $f(x) = \cos x$.

Activité 3

1. Tracer dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la parabole P d'équation $y = -x^2 + 2x$.
   On notera A le point d'intersection de P avec l'axe des abscisses, distinct de O.
2. Déterminer la largeur du rectangle dont un côté est $[OA]$ et dont l'aire est la même que celle de la partie D limitée par P et l'axe des abscisses.

Théorème (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$. Soit m et M deux réels.

Si pour tout x de $[a,b]$, $m \le f(x) \le M$, alors $m \le \bar{f} \le M$.

Démonstration

L'hypothèse $m \le f(x) \le M$, pour tout x de $[a,b]$ implique que

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx.$$

Le théorème découle alors des égalités $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ et $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$,

sachant que $b-a>0$.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$. Il existe $c \in [a,b]$, tel que $\bar{f} = f(c)$.

Démonstration

La fonction f étant continue sur $[a,b]$, on en déduit qu'il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$. Le corollaire en découle, sachant que $m \le \bar{f} \le M$.

Activité 4

Montrer les inégalités ci-dessous

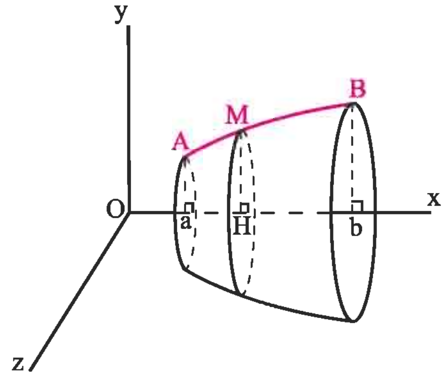
$$0.5 \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \le 1, \quad \frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \le \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

V. Calcul de volumes de solides de révolution

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère dans le plan (Oxy), un arc $\overset{\frown}{AB}$ d'une courbe d'équation $y=f(x)$ et dont les extrémités A et B ont pour coordonnées dans ce plan $A(a,\ f(a))$ et $B(b,\ f(b))$.

La rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ autour de l'axe (Ox) engendre une surface appelée surface de révolution (S). (voir figure ci-contre).



En particulier chaque point $M(x,\ f(x))$ de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ décrit un cercle d'axe (Ox), de centre H le projeté orthogonal de M sur (Ox) et de rayon $HM = |f(x)|$.

La partie de l'espace limitée par la surface (S) et les plans d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelée solide de révolution de surface (S).

La section du solide par le plan passant par M et perpendiculaire à l'axe $(O,\vec{i})$ est le disque de centre H et de rayon HM.

L'aire de ce disque est $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$.

Nous donnons ci-dessous la formule donnant le volume du solide de révolution engendré par la rotation d'un arc de courbe autour de l'axe $(O,\ \vec{i})$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB} = \{M(x,y)$ tels que $y = f(x)$ et $a \le x \le b\}$ autour de l'axe $(O,\ \vec{i})$ est le réel $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

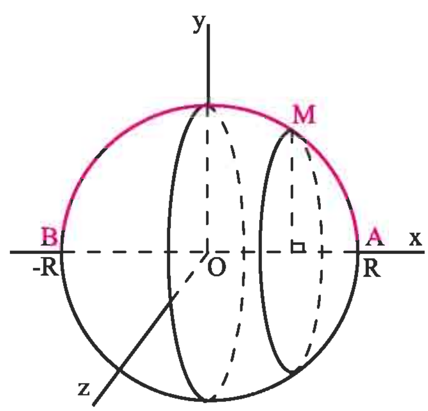
Activité 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit R un réel strictement positif.

On considère dans le plan (Oxy), le demi-cercle $\overset{\frown}{AB}$ d'équation $y = f(x)$ et dont les extrémités A et B ont pour coordonnées dans ce plan

$A\begin{cases} x = R \\ y = 0 \end{cases}$, $B\begin{cases} x = -R \\ y = 0 \end{cases}$.



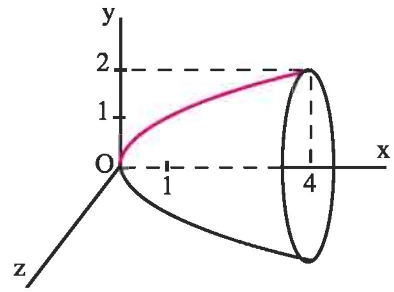
La rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ au tour de l'axe (Ox) engendre une sphère de rayon R et de centre O.

Si $M(x,\ f(x))$ est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors M décrit un cercle de rayon $|f(x)|$.

Déterminer $f(x)$.

Retrouver alors le volume de la sphère de centre O et de rayon R.

Activité 2



Le solide de révolution S est obtenu en faisant tourner la portion de la parabole d'équation $y=\sqrt{x}$,$(0 \le x \le 4)$ au tour de son axe (Ox) (voir figure).
Déterminer le volume du solide S.

VI. Fonctions définies par une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. Alors la fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration

Pour toute primitive G de f sur I et pour tout x de I , $\int_a^x f(t)dt = G(x)-G(a)$.

On en déduit que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F' = f$.

Le théorème en découle sachant que $F(a)=\int_a^a f(t)dt = 0$.

Conséquence

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$, pour tout x de I.

Activité 1

Justifier, dans chacun des cas, la dérivabilité de la fonction F sur I et calculer sa fonction dérivée.

1. $F(x)=\int_1^x \sqrt{1-t^2}\,dt$, $I=[-1,1]$.
2. $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$, $I=\mathbb{R}$.
3. $F(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt$, $I=]0,+\infty[$.
4. $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $I=]-1,1[$.

Exercice résolu 1

Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt$.

1. a. Montrer que F est croissante sur $[1,+\infty[$.

   b. Montrer que F est majorée par 2.
   c. En déduire que F admet une limite finie L au voisinage de $+\infty$.

2. Soit G la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $G(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $G(x)=F(x)+\frac{1-\cos x}{x}+\cos 1-1$.

En déduire que G possède une limite finie en $+\infty$.

Solution

Sur $[1,+\infty[$, la fonction F est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$.

De plus, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est positive sur $[1,+\infty[$ car $0 \le \cos t \le 1$.

On en déduit que pour tout $x \ge 1$, $F'(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ et par suite F est croissante sur $[1,+\infty[$.

b. Pour tout $t \ge 1$, $\left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| \le \frac{2}{t^2}$. Il en résulte que $\left|\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt\right| \le 2\int_1^x \frac{1}{t^2}dt$, $x \ge 1$.

Le résultat découle alors de l'égalité $2\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = 2\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 2-\frac{2}{x} \le 2$.

c. La fonction F est croissante et majorée sur $[1,+\infty[$. On en déduit qu'elle admet une limite finie L en $+\infty$.

2. Posons $u(t)=\frac{1}{t}$ $\qquad u'(t)=-\frac{1}{t^2}$

$v'(t)=\sin t$ $\qquad v(t)=1-\cos t$

On peut alors écrire $\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt$.

On en déduit que $G(x)=F(x)+\frac{1-\cos x}{x}+\cos 1-1$, pour tout x de $[1,+\infty[$.

On sait que F admet une limite finie L en $+\infty$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1-\cos x}{x}\right|=0$ car $0\le\left|\frac{1-\cos x}{x}\right|\le\frac{2}{x}$, pour tout $x\ge 1$.

Le résultat en découle.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , u une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $u(J)\subset I$ et a un réel de I. Alors la fonction F définie sur J par

$F(x)=\int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $F'(x)=f(u(x)).u'(x)$, pour tout x de J.

Démonstration

Remarquons que $F=G\circ u$ avec $G:x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ et $u:x\mapsto u(x)$.

On en déduit, d'après les hypothèses faites sur f et u que F est dérivable et que l'on a $F'(x)=f(u(x)).u'(x)$.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $[0,\ 1[$ par $f(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0,\ 1[$ et déterminer sa fonction dérivée f'.

2. Soit g la fonction définie sur $[0,\ \frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=\int_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

   a. Montrer que g est dérivable sur $[0,\ \frac{\pi}{2}[$ et déterminer sa fonction dérivée.

   b. En déduire que $g(x)=x$ pour tout $x\in[0,\ \frac{\pi}{2}[$.

3. Calculer les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

4. a. Montrer que pour tout $x\in[0,1[$ il existe un unique $t\in[0,\ \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $\sin t=x$.

   b. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\frac{\pi}{2}$.

5. Représenter la fonction f.

Activité 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0.

On considère la fonction g définie sur I par $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$.

1. Montrer que g est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

2. On suppose que f est impaire.
   a. Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x)=0$.
   b. En déduire que pour tout $x \in I$, $\int_{-x}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{x} f(t)dt$.

3. On suppose que f est paire.
   a. Montrer que g est la primitive sur I qui s'annule en 0, de la fonction $t \mapsto 2f(t)$.
   b. En déduire que $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_{0}^{x} f(t)dt$ et que $\int_{-x}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et soit a un réel de I.

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Activité 4

Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-5\pi}^{5\pi} x^5 \sin^6(x)dx \ , \ \int_{-1}^{1} \frac{t^5}{t^6+1}dt \ , \ \int_{-5\pi}^{5\pi} x^{1001}\cos^{100}(x)dx \ , \ \int_{-1}^{1} \left|t^3+t\right|dt .$$

Activité 5

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\int_{x}^{x+T} f(t)dt$.

Montrer que pour tout réel x, $g(x)=\int_{0}^{T} f(t)dt$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T.

Pour tout réel a, $\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$.

Activité 6

Calculer les intégrales $\int_{0}^{20\pi}|\sin x|dx$; $\int_{-10\pi}^{10\pi}|\cos x|dx$.

VII. Exemples de suites définies par une intégrale

Activité 1

1. On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ et $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$. Montrer que $I_1 = 1$ et $J_1 = \frac{\pi}{2} - 1$.

2. On pose pour tout $n \geq 2$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\,dx$.

a. Calculer I_2 et J_2.

b. Montrer que $I_n = nJ_{n-1}$ et que $J_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - nI_{n-1}$.

c. Calculer I_3, J_3, I_4 et J_4.

Exercice résolu 2

On pose pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^2 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $I_n = \int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx - 4I_{n-2}$.
3. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que
$nI_n = 2^n\sqrt{2} - 4(n-1)I_{n-2}$, pour tout entier $n \geq 3$.

En déduire les valeurs de I_3 et I_5.

Solution

1. La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+4}$.

On en déduit que $I_1 = 2\sqrt{2} - 2$.

2. Remarquons que l'on peut écrire que pour tout entier $n \geq 3$ et tout réel x,

$\frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^{n-2}\left(x^2+4\right) - 4x^{n-2}}{\sqrt{x^2+4}}$. On en déduit que $I_n = \int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx - 4I_{n-2}$. (*)

3. Intégrons par parties l'intégrale $\int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx$.

En posant $u(x)=\sqrt{x^2+4}$ et $v'(x)=x^{n-2}$, il vient que

$$\int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx=\left[\frac{x^{n-1}}{n-1}\sqrt{x^2+4}\right]_0^2-\frac{1}{n-1}\int_0^2 x^{n-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx.$$

On en déduit que $\int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{2^n\sqrt{2}}{n-1}-\frac{1}{n-1}I_n$.

En reportant la formule obtenue dans (*), on obtient le résultat.

D'après ce qui précède, $I_3=\frac{16-8\sqrt{2}}{3}$ et $I_5=\frac{224\sqrt{2}-256}{15}$.

Problème résolu

On pose $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. a. Montrer que pour tout entier n, $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$.

   b. En déduire I_3, I_4, I_5 et I_6.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n, $0<I_{n+1}\le I_n$.

3. a. Montrer que pour tout $n\ge 0$, $1\le\frac{I_{n+1}}{I_{n+2}}\le\frac{I_n}{I_{n+2}}$.

   b. Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}=1$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=(n+1)I_nI_{n+1}$.

   Montrer que la suite (u_n) est constante et que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{\pi}{2}$.

   Montrer que $\frac{\pi}{2(n+1)}\le I_n^2\le\frac{\pi}{2n}$. Donner un encadrement de I_{1000}.

Solution

1. a. Le calcul donne immédiatement que $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

D'autre part, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)dt = \frac{\pi}{4}$.

b. $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)dt$

Pour $n \geq 1$, on pose

$$u(t) = \cos^{n+1}(t) \qquad u'(t) = -(n+1)\cos^n(t)\sin t$$
$$v'(t) = \cos t \qquad v(t) = \sin t$$

Il en résulte que

$$I_{n+2} = \left[\cos^{n+1}(t)\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)dt,$$

ou encore que, $I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\left(1-\cos^2(t)\right)dt = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$.

On en déduit que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

D'autre part, il résulte de a) que $I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{4}$. Le résultat en découle.

c. En appliquant la relation $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$, $n \geq 0$, on obtient que

• $I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}$, • $I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{16}$, • $I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{8}{15}$, • $I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5\pi}{32}$.

2. Pour tout $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \cos t \leq 1$. On en déduit que pour tout entier naturel n et tout $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$. De plus, $\cos t > 0$ pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Il en résulte que pour tout entier naturel n, $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t\,dt \leq \int_0^{\alpha} \cos^n t\,dt$, ou encore que $0 < I_{n+1} \leq I_n$.

3. a. D'après la question précédente, la suite (I_n) est strictement positive et décroissante. On en déduit que pour tout entier naturel n, $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. Ce qui implique que $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$, pour tout entier naturel n. (*)

b. D'après la première question, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, $n \geq 0$. On en déduit que

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$. Par passage à la limite dans (*), on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = 1$.

4. Pour $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = I_{n+1}\left[(n+2)I_{n+2} - (n+1)I_n\right]$

D'après la question 1. b. $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, ou encore, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

Il en résulte que $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout entier naturel n , c'est à dire que la suite (u_n) est constante. On déduit de l'égalité $u_0 = I_0.I_1 = \frac{\pi}{2}$ que $u_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n.

La suite (I_n) étant décroissante, on peut écrire pour tout entier non nul n

$nI_nI_{n+1} \leq nI_n^2 \leq nI_nI_{n-1}$, ou encore que $\frac{n}{n+1}(n+1)I_nI_{n+1} \leq nI_n^2 \leq nI_nI_{n-1}$.

Il en résulte que $\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{\pi}{2} \leq nI_n^2 \leq \frac{\pi}{2}$, pour tout entier non nul n. Ce qui implique que

$\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$, pour tout entier non nul n.

On déduit de l'inégalité précédente que $\sqrt{\frac{\pi}{2002}} \leq I_{1000} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2000}}$.