Chapitre 1

Continuité et limites

C’est l’élaboration d’une démonstration précise du théorème des valeurs intermédiaires, qui amena Bolzano (1817) à définir la notion de continuité d’une fonction.
Le théorème des valeurs intermédiaires , qui semble géométriquement évident, a été utilisé sans scrupules par Euler et Gauss.
Bolzano, cependant estime qu’une démonstration précise est nécessaire pour atteindre une plus grande rigueur en Analyse.

(E.Haier et al, L’analyse au fil de l’histoire , 2000).

Chapitre 1

Continuité et limites

I. Rappels

Dans ce paragraphe nous rappelons les principaux théorèmes vus en troisième année.

I.1 Continuité et limite en un réel

Activité 1

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et justifier la continuité de f en tout réel de son ensemble de définition.

1. $f : x \mapsto 1 - x + x^2$.
2. $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{x-1}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x + 1}{2 + \cos x}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{|-5x+1| - 2}{x+3}$.
5. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$.

• Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
• Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
• Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout réel.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- Si f est continue en a, alors les fonctions αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $|f|$ et f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.
- Si f est positive sur I et f est continue en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 4x + 2}{|x-1|}$.

1. Vérifier que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = 2|x-1|$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I.
S'il existe une fonction g définie sur I, continue en a et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{x^2+\sin x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.
Si la fonction f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a, alors la fonction g définie sur I par $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq a, \\ \ell & \text{si } x=a. \end{cases}$ est continue en a.

Activité 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-4\left(x^2+x-2\right)}{3\sqrt{1-x}} & \text{si } x<1, \\ \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x>1, \\ 0 & \text{si } x=1. \end{cases}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
2. La fonction f est-elle continue en 1 ?

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en un réel a de I, si et seulement si, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

Activité 5

Soit la fonction $f: x\mapsto \dfrac{|x+1|}{x+1}$

La fonction f admet-elle une limite en -1 ?

I.2 Continuité sur un intervalle

Activité

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x\in\,]0,\pi], \\ f(0)=0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[0,\pi]$.

- Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I.
- Une fonction est continue sur un intervalle $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.

De façon analogue, on définit la continuité de f sur les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$.

I.3 Opérations sur les limites

Soit L et L' deux réels.

Les résultats qui suivent concernent les opérations sur les limites en un réel ou à l'infini.

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
L	L'	$L+L'$
L	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	L'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f\times g)$
L	L'	$L\times L'$
$+\infty$	$L'>0$	$+\infty$
$+\infty$	$L'<0$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim\left(\frac{f}{g}\right)$
L	$L'\neq 0$	$\frac{L}{L'}$
$+\infty$	$L'>0$	$+\infty$
$+\infty$	$L'<0$	$-\infty$
L	$+\infty$	0
L	$-\infty$	0
$L\neq 0$	0	∞ (On applique la règle des signes).

$\lim f$	$\lim \lvert f\rvert$	$\lim\sqrt{\lvert f\rvert}$
L	$\lvert L\rvert$	$\sqrt{\lvert L\rvert}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Les règles énoncées dans les tableaux précédents ne s'appliquent pas lorsqu'il s'agit d'étudier

* la limite de la somme de deux fonctions dont l'une tend vers $+\infty$ l'autre tend vers $-\infty$.
* la limite du produit de deux fonctions dont l'une tend vers l'infini l'autre tend vers 0.
* la limite du quotient de deux fonctions qui tendent toutes les deux vers l'infini ou toutes les deux vers 0.

Une transformation d'écriture adéquate pourra nous ramener à l'un des théorèmes résumés dans les tableaux ci-dessus.

Théorème

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Activité

Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\dfrac{1}{x^2+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-5x+1}-3x$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^2-x\right)^2+\sqrt{2}\,x$.
4. $\lim\limits_{x\to2} 5x^3+\left(\dfrac{3x-1}{\lvert x-2\rvert}\right)^5$.
5. $\lim\limits_{x\to3} \sqrt{2x-3}\left(\dfrac{3}{(x-3)^2}-2\right)$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}}-2x\right)\left(x^3+x\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-x$.

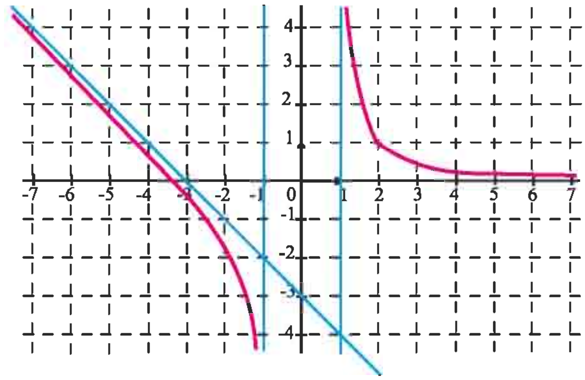
II. Branches infinies

Activité 1

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Les droites d'équations $x=-1$, $x=1$, $y=0$ et $y=-x-3$ sont des asymptotes à cette courbe.

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x+3$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.



Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On dit que C_f admet une branche infinie dès que l'une des coordonnées d'un point de C_f tend vers l'infini.

Nous avons résumé dans le tableau ci-dessous la nature de certaines branches infinies vues en $3^{\text{ème}}$ année.

f	C_f
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$.	La droite $D: x=a$ est asymptote à C_f.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.	La droite $D: y=L$ est asymptote à C_f.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)-(ax+b)\right)=0$.	La droite $D: y=ax+b$ est asymptote à C_f.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Montrer que pour tout réel strictement positif x, $f(x)=x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$.

c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2. a. Montrer que pour tout réel strictement positif x, $f(x)-x=\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$. Interpréter graphiquement le résultat.

Soit f une fonction telle que $f(x)$ tend vers l'infini, lorsque x tend vers l'infini. On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Alors la branche infinie de C_f dépend de la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$, lorsque x tend vers l'infini.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous un procédé de détermination de la branche infinie de C_f dans le cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Les autres cas se déterminent de façon analogue.

* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ est infinie, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.
* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.
* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a\ (a\in\mathbb{R}^*)$ alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.
  - Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b\ (b\in\mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
  - Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y=ax$ est une direction asymptotique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

Activité 3

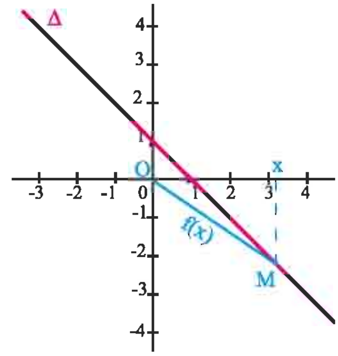
Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=2x+\sqrt{x+1}$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.
3. Tracer C_f.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit Δ la droite d'équation $y=1-x$.
A tout réel x, on associe le point M de Δ d'abscisse x et on désigne par f la fonction définie par $f(x)=OM$.



Soit C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier géométriquement les variations de f, ainsi que ses limites en l'infini.
2. a. Expliciter $f(x)$.

   b. Montrer que la droite $D: x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C_f.

   c. Montrer que la droite D' d'équation $y=\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
3. Etudier les variations de f et tracer C_f.

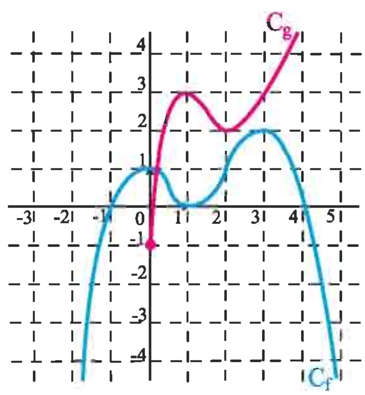
Soit f une fonction définie sur D.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
La droite $\Delta: x=a$ $(a\in\mathbb{R})$ est un axe de symétrie pour C_f si pour tout x de D, $\begin{cases}(2a-x)\in D,\\ f(2a-x)=f(x).\end{cases}$

III. Continuité et limite d'une fonction composée

III.1 Composée de deux fonctions

Activité 1

Dans la figure ci-contre C_f et C_g sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.



1. Lire sur le graphique les images par f des réels -1, 0, 1, 2 et 3, ainsi que les images par g des réels 0, 1, 2, et 3.
2. Soit les fonctions $h: x\mapsto g(f(x))$ et $k: x\mapsto f(g(x))$.
   a. Déterminer les images par h des réels -1, 0, 1, 2 et 3.
   b. Déterminer les images par k des réels 0, 1, 2 et 3.

Définition

Soit u une fonction définie sur un ensemble I et v une fonction définie sur un ensemble J tel que $u(I)$ est inclus dans J.

La fonction notée $v\circ u$, définie sur I par $v\circ u(x)=v(u(x))$, est appelée fonction composée de u et v.

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$.

1. $f : x \mapsto \cos(\pi x + 1)$.
2. $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. $f : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)$.

III. 2 Continuité d'une fonction composée

Théorème

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $u(a)$.

Si u est continue en a et v est continue en $u(a)$, alors la fonction $v \circ u$ est continue en a.

Démonstration

Soit un réel $\beta > 0$. La fonction v étant continue en $u(a)$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$y \in J, \ |y - u(a)| < \alpha \ \Rightarrow \ |v(y) - v(u(a))| < \beta.$$

Puisque la fonction u est continue en a, alors il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que

$$x \in I, \ |x - a| < \alpha_1 \ \Rightarrow \ |u(x) - u(a)| < \alpha.$$

On peut donc écrire

$$x \in I, \ |x - a| < \alpha_1 \ \Rightarrow \ |u(x) - u(a)| < \alpha \ \Rightarrow \ |v(u(x)) - v(u(a))| < \beta$$

Il en résulte que la fonction $v \circ u$ est continue en a.

Corollaire

La composée de deux fonctions continues est continue.

Activité

Etudier dans chaque cas la continuité de f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \cos\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $\quad I =]1, +\infty[$.

III. 3 Limite d'une fonction composée

Théorème (admis)

Soit I et J deux intervalles ouverts, a un réel de I, ℓ un réel de J et ℓ' un réel.
Soit u une fonction définie sur I, sauf peut être en a et v une fonction définie sur J, sauf peut être en ℓ.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \ell} v(x) = \ell'$, alors $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = \ell'$.

Activité 1

Déterminer dans chaque cas la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

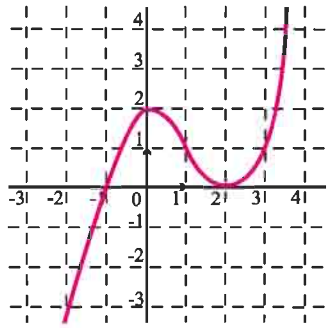
1. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x^2) - 1}{x^2}$ $\quad a = 0$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1}$ $\quad a = 1$.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi\left(x^2+x-12\right)}{x-3}\right)$.

f est-elle prolongeable par continuité en 3 ?

Activité 3



Dans la figure ci-contre est représentée une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 2} f\left(\dfrac{2}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 4} f\left(\dfrac{x-4}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x-1)$.

Théorème (admis)

Soit u et v deux fonctions. Soit a, b et c finis ou infinis.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} v(x)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} v\circ u(x)=c$.

Activité 4

Soit la fonction $f : x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Activité 5

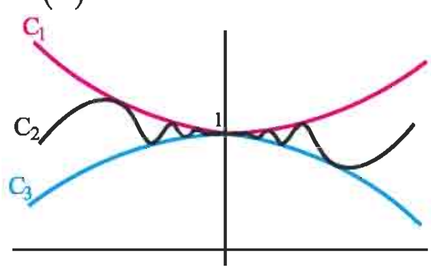
Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} \tan\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-1)\cos\left(\dfrac{\pi x}{x-1}\right)$.

IV. Limites et ordre

Activité 1

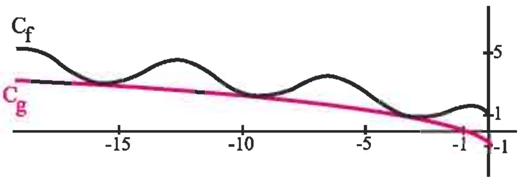
Soit f, g et h les fonctions définies par $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+1$, $g(x)=-x^2+1$ et $h(x)=x^2+1$.

1. Montrer que pour tout réel non nul x on a $g(x)\le f(x)\le h(x)$.
2. Dans la figure ci-contre on a représenté les trois fonctions f, g et h.
   a. Identifier la courbe de chacune de ces fonctions.
   b. Que peut-on conjecturer sur la limite de f(x) lorsque x tend vers 0 ?



Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté les fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{-x}+\cos x$ et $g(x)=\sqrt{-x}-1$



1. Etudier la position relative de C_f et C_g.
2. Que peut-on conjecturer sur la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?

Théorème

Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I. Soit deux réels ℓ et ℓ'.

- Si $u(x)\leq v(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=\ell$ et $\lim\limits_{a} v=\ell'$ alors $\ell\leq\ell'$.
- Si $u(x)\leq f(x)\leq v(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=\lim\limits_{a} v=\ell$ alors $\lim\limits_{a} f=\ell$.

Les résultats énoncés ci-dessus restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.

Démonstration

- Posons $g(x)=v(x)-u(x)$ pour tout $x\neq a$.

D'après l'hypothèse faite sur les fonctions u et v, la fonction g est positive et $\lim\limits_{a} g=\ell'-\ell$.

On en déduit que $\ell\leq\ell'$.

- Posons $h(x)=f(x)-u(x)$ et $g(x)=v(x)-u(x)$ pour tout $x\neq a$.

D'après l'hypothèse faite sur les fonctions f, u et v, $0\leq h(x)\leq g(x)$ pour tout $x\neq a$ et $\lim\limits_{a} g=0$. On en déduit que pour tout $\beta>0$, il existe $\alpha>0$ tel que

$x\in I$ et $0<|x-a|<\alpha \Rightarrow h(x)\leq g(x)<\beta$.

Le théorème en découle.

Théorème

Soit f et u deux fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I.

- Si $f(x)\geq u(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=+\infty$, alors $\lim\limits_{a} f=+\infty$.
- Si $f(x)\leq u(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=-\infty$, alors $\lim\limits_{a} f=-\infty$.

Ces résultats restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.

Démonstration

- Soit un réel $A>0$. L'égalité $\lim\limits_{a} u=+\infty$ implique l'existence d'un réel $\alpha>0$ tel que

$x\in I$ et $0<|x-a|<\alpha \Rightarrow u(x)>A$.

On en déduit, compte tenu de l'hypothèse, que $x \in I$ et $0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) > u(x) > A$.
La propriété en découle.

- La deuxième propriété découle de la première en considérant les fonctions $-u$ et $-f$.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-\cos x}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

Activité 4

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} + \cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sqrt{x}$.

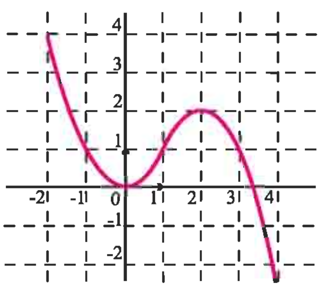
1. Montrer que $f(x) \geq \dfrac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire $\lim\limits_{0^+} f$.

V. Image d'un intervalle par une fonction continue

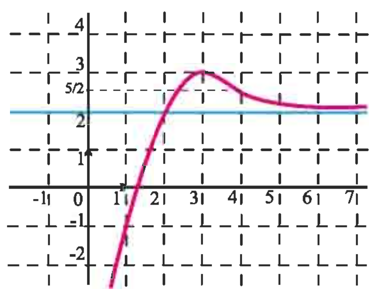
V. 1 Théorème des valeurs intermédiaires

Activité 1

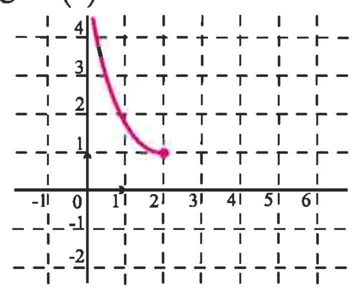
Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image $f(I)$ de l'intervalle I.



$I =]-1,3[$



$I = [1,4]$



$I =]0,2]$

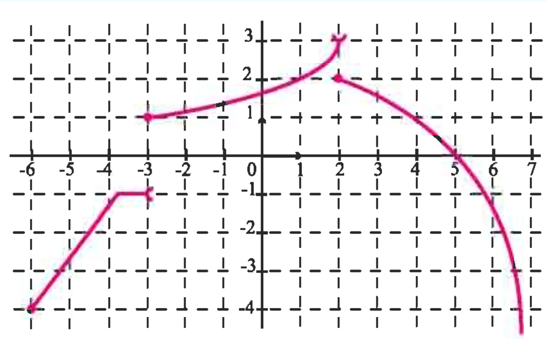
Théorème (Rappel)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Activité 2

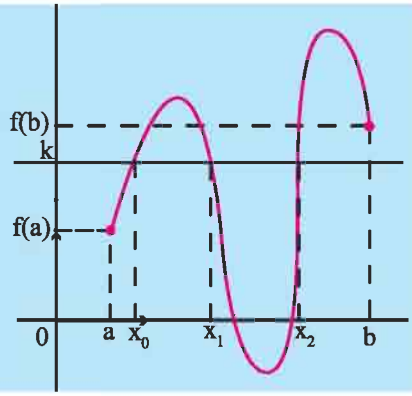
Le graphique ci-contre représente une fonction g définie sur $[-6,+\infty[$.

Déterminer $g([-6,4])$ et $g([-3,5])$.



Théorème des valeurs intermédiaires (Rappel)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x)=k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.
En particulier, si $f(a).f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$.



Activité 3

Montrer que les fonctions ci-dessous sont strictement monotones sur I.

$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}_+$;

$x \mapsto \cos^2 x$, $I=[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$;

$x \mapsto (1+x)^{20}$, $I=[0,4]$.

Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I tels que $a<b$, $f(a)<f(b)$.
Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I tels que $a<b$, $f(a)>f(b)$.
Une fonction est strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

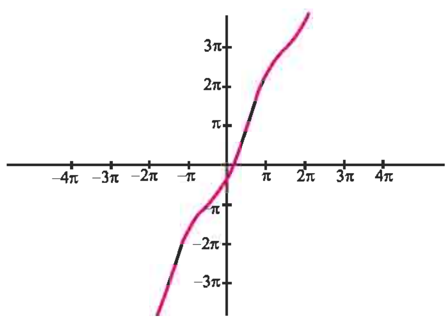
Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a,b]$.

Démonstration
Elle découle des valeurs intermédiaires et de la stricte monotonie de f.

Activité 4

Le graphique ci-contre représente la fonction
$f : x \mapsto 2x - \cos x$

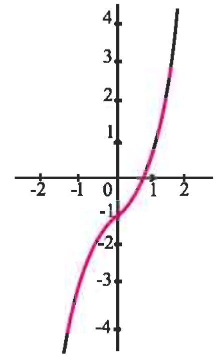


1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Etudier les variations de f sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
   b. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{\pi}{6}$ admet une solution unique α dans $[0,\frac{\pi}{2}]$.
3. a. Lequel des intervalles $]0,\frac{\pi}{4}[$ et $]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ contient la solution α ?
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $\frac{\pi}{8}$.

Activité 5

La courbe représentée ci-contre est celle de la fonction

$f : x \mapsto x^3 + x - 1$.



I/ 1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,1]$.

4. On se propose de trouver un encadrement de plus en plus précis de α, en divisant à chaque fois l'intervalle contenant α en deux intervalles de même amplitude.
(Ce procédé est appelé « méthode de dichotomie »).

a. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire que α appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.

b. Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$ et en déduire que α appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

c. Poursuivre le procédé pour déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

II/ Avec l'ordinateur

Pour réaliser la feuille de calcul ci-contre avec le tableur Excel,

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	(a+b)/2	f(a)	f(b)	f((a+b)/2)
2	0	1	0,5	-1	1	-0,375
3	0,5	1	0,75	-0,375	1	0,171875
4	0,5	0,75	0,625	-0,375	0,171875	-0,13085938
5	0,625	0,75	0,6875	-0,13085938	0,171875	0,01245117
6	0,625	0,6875	0,65625	-0,13085938	0,01245117	-0,06112671
7	0,65625	0,6875	0,671875	-0,06112671	0,01245117	-0,02482986
8	0,671875	0,6875	0,6796875	-0,02482986	0,01245117	-0,0063138
9	0,6796875	0,6875	0,68359375	-0,0063138	0,01245117	0,00303739
10	0,6796875	0,68359375	0,68164063	-0,0063138	0,00303739	-0,001646
11	0,68164063	0,68359375	0,68261719	-0,001646	0,00303739	0,00069374
12	0,68164063	0,68261719	0,68212891	-0,001646	0,00069374	-0,00047662
13	0,68212891	0,68261719	0,68237305	-0,00047662	0,00069374	0,00010844
14	0,68212891	0,68237305	0,68225098	-0,00047662	0,00010844	-0,00018412

- dans les cellules A1, B1, C1, D1, E1 et F1 taper respectivement a, b, $(a+b)/2$, $f(a)$, $f(b)$ et $f((a+b)/2)$;
- dans la cellule A2, taper 0 ; dans la cellule B2, taper 1 (encadrement initial) ;
- dans la cellule C2, taper $\boxed{=(A2+B2)/2}$

dans la cellule D2, taper $\boxed{=\text{PUISSANCE}(A2;3)+A2-1}$ et recopier vers la droite en E2 et F2 ;

- dans la cellule A3, taper $\boxed{=\text{SI}(F2*E2>0;A2;C2)}$ et dans la cellule B3, taper $\boxed{=\text{SI}(F2*E2>0;C2;B2)}$;

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Démonstration

Supposons que f change de signe sur I.

Il existe alors deux réels α et β $(\alpha < \beta)$ de I tels que $f(\alpha).f(\beta) < 0$

La fonction f étant continue sur $[\alpha, \beta]$, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[\alpha, \beta]$. Ce qui contredit l'hypothèse « f ne s'annule en aucun point de I ».

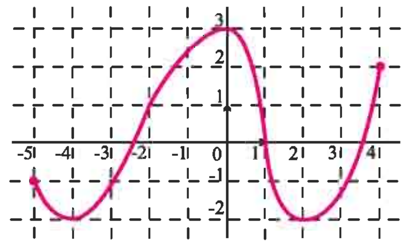
Activité 6

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{10}$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + ... + \sin^{10} x$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

V. 2 Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue

Activité 1

On a représenté ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $[-5, 4]$.



1. Déterminer $f([-5, 4])$.
2. a. Déterminer le minimum m et le maximum M de f sur $[-5, 4]$.

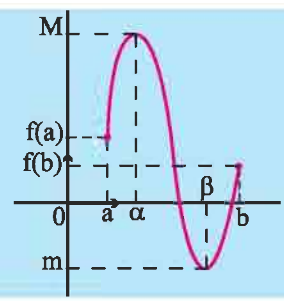
   b. Résoudre graphiquement chacune des équations $f(x) = m$ et $f(x) = M$.

Théorème

L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m, M]$.

Le réel m est le minimum de f sur $[a, b]$.

Le réel M est le maximum de f sur $[a, b]$.



Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x$.

1. a. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

   b. En déduire $f\left([-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]\right)$.

2. Déterminer l'image par f de chacun des intervalles, $[\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}]$ et $[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$.

Activité 3

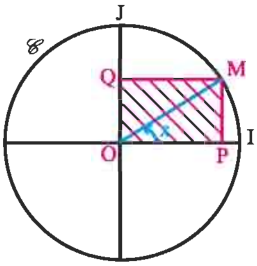
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

Déterminer $f([1,4])$, $f([-10,-1])$.

Activité 4

Sur la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et $\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})} \equiv x[2\pi]$ avec x appartenant à $]0,\frac{\pi}{2}[$.

On désigne par $\mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{P}(x)$ l'aire et le périmètre du rectangle OPMQ.



1. Soit f et g les fonctions définies sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par

   $f(x) = \sin x \cos x$ et $g(x) = 2(\sin x + \cos x)$.

   Déterminer l'image de l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$ par chacune des fonctions f et g.

2. En déduire les valeurs maximales respectives de $\mathcal{A}(x)$ et de $\mathcal{P}(x)$.

VI. Image d'un intervalle par une fonction strictement monotone

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).

- Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.
- Si la fonction f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.
- Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b.
- Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en b.

Activité 1

Soit f une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout entier naturel n, $f(n) = n+1$. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Théorème (admis)

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone sur I est un intervalle de même nature.

Exemples

Intervalle I	Si f est strictement croissante sur I	Si f est strictement décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[\ (a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{b^-} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-} f,f(a)]$
$I=[a,+\infty[\ (a\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{+\infty} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{+\infty} f,f(a)]$
$I=]a,b[\ (a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$	$f(I)=]\lim\limits_{a^+} f,\lim\limits_{b^-} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{a^+} f[$

Activité 2

Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$, $I=]2,\ +\infty[$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{x^2-2x}$, $I=]-\infty,\ 0]$.
3. $f : x \mapsto \tan(x\pi)$, $I=]-\dfrac{1}{2},\ 0[$.

Problème résolu

I. 1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x)=16x^2(1-x)^2$.

a. Vérifier que pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

b. Montrer que $f([0,\ 1])=[0,\ 1]$.

2. Soit un entier $n\ge 2$. Montrer que l'équation $f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)=f(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,\ 1-\dfrac{1}{n}]$.

II. Le but de cette partie est de montrer que si f est une fonction continue sur l'intervalle $[0,\ 1]$ telle que $f(0)=f(1)$ et $f([0,\ 1])=[0,\ 1]$, alors pour tout entier $n\ge 2$, l'équation $f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)=f(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,\ 1-\dfrac{1}{n}]$.

Soit g la fonction définie sur $[0,\ 1-\dfrac{1}{n}]$ par $g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que g est continue sur $[0,\ 1-\dfrac{1}{n}]$.

2. Montrer que $g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+...+g\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$.

3. En déduire qu'il existe $\alpha \in [0,\ 1-\frac{1}{n}]$ tel que $f\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)=f(\alpha)$.

Solution

I.1.a. $f(x)=16\left(x(1-x)\right)^2$, $x\in[0,\ 1]$.

On considère la fonction f_1 définie sur $[0,\ 1]$ par $f_1(x)=x(1-x)$.

Comme la fonction f_1 atteint son maximum sur $[0,\ 1]$ en $\frac{1}{2}$, on en déduit que

$f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$, $x\in[0,\ 1]$.

b. La fonction f est continue sur le fermé borné $[0,1]$, il existe deux réels α et β tels que

$f([0,\ 1])=[f(\alpha),\ f(\beta)]$.

$f(\alpha)$ est le minimum de f sur $[0,\ 1]$ et $f(\beta)$ est le maximum de f sur $[0,\ 1]$.

Pour tout $x\in[0,\ 1]$, $0\le f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

On en déduit que $f([0,\ 1])=[0,\ 1]$.

2. Considérons la fonction h définie sur l'intervalle $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$ par $h(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$.

La fonction h est une fonction polynôme donc elle est continue sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$ et

$h(0).h\left(1-\frac{1}{n}\right)<0$.

On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $h(x)=0$

admet au moins une solution sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$.

II. 1. On peut écrire $g=f-f\circ u$, où u est la fonction définie sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$ par $u(x)=x+\frac{1}{n}$.

La fonction u est continue sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$ et $u(x)\in[\frac{1}{n},\ 1]\subset[0,\ 1]$.

D'autre part, la fonction f est continue sur $[0,\ 1]$.

Il en résulte d'après la continuité d'une fonction composée sur un intervalle que $f\circ u$

est continue sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$ et par suite la fonction g est continue sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$.

2. Posons $S_n = g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + ... + g\left(\frac{n-1}{n}\right)$, n entier supérieur ou égal à 2.

Montrons que pour tout entier $n \geq 2$, $S_n = 0$.

Pour tout entier $n \geq 2$,

$$S_n = g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + ... + g\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \left(f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right)\right) + ... + \left(f\left(\frac{n-2}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) + \left(f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1)\right).$$

On en déduit que $S_n = f(0) - f(1) = 0$.

3. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$.

Supposons que pour tout réel $x \in [0,\ 1-\frac{1}{n}]$, $g(x) \neq 0$.

Il résulte de la continuité de g sur l'intervalle $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$, que g garde un signe constant sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$ et par conséquent le réel $g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + ... + g\left(\frac{n-1}{n}\right)$ est ou bien strictement positif ou bien strictement négatif ce qui est en contradiction avec le résultat $g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + ... + g\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0$.

En conclusion, il existe un $\alpha \in [0,\ 1-\frac{1}{n}]$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est à dire $f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha)$.