Chapitre 9

Equations différentielles

Le pendule isochrone. Le problème consiste à modifier le pendule standard pour rendre la période indépendante de l'amplitude.
Hygens (1673, Horologium Oscillatorium) a l'idée de modifier le cercle du pendule standard pour que la force accélératrice devienne proportionnelle à la longueur d'arc s.
Le mouvement du pendule serait alors décrit par $s'' + Ks = 0$, dont les oscillations sont indépendantes de l'amplitude.

(E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000).

Chapitre 9

Equations différentielles

I. Définition

Activité 1

1. Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$. Déterminer une relation entre f' et f.
2. Reprendre la même question pour les fonctions $g : x \mapsto -2e^{-x}$ et $h : x \mapsto 0,5e^{-x}$.
3. Représenter les fonctions f, g et h dans un même repère.
4. Donner d'autres fonctions qui vérifient la relation trouvée dans la première question.

Activité 2

Une expérience consiste à étudier l'évolution d'une population de bactéries.
On désigne par N_0 le nombre de bactéries à l'instant $t = 0$, $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t et on note $N'(t)$ la vitesse instantanée d'évolution des bactéries à l'instant t.

1. On constate que $N(t) = 9000e^{-0,4t}$.
   a. Donner le nombre de bactéries aux instants $t = 0$, $t = 10$ et $t = 20$.
   b. Donner une relation entre N' et N.
   c. Déterminer la vitesse instantanée d'évolution aux instants $t = 10$ et $t = 20$.
   d. Représenter la fonction $t \mapsto N(t)$.
2. Reprendre les questions précédentes si on suppose que $N(t) = 3000e^{0,4t}$.

Vocabulaire

Une équation de la forme $y' = ay$, où l'inconnue y est une fonction et a est un réel, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $y' = ay$, c'est trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y' = ay$.
Ces fonctions sont appelées solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$.

Théorème

Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ke^{ax}$, où k est un réel quelconque.

Démonstration

Désignons par (E) l'équation différentielle $y' = ay$.

Pour tout réel k, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f'(x) = k\,ae^{ax} = af(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Réciproquement, montrons que toute solution g de (E) est telle que $g(x) = ke^{ax}$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Soit g une solution de (E) et h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = g(x)e^{-ax}$,

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$, pour tout réel x.

La fonction g étant solution de (E) par hypothèse, on en déduit que

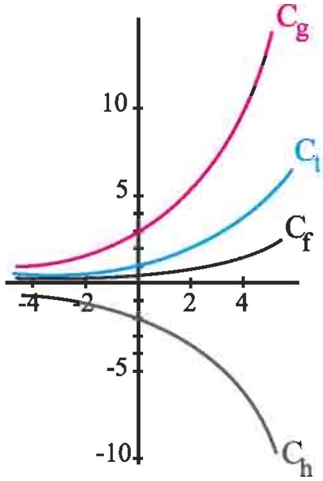
$h'(x) = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$, ou encore que $h'(x) = 0$, pour tout réel x.

Ce qui implique que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe un réel k tel que $h(x) = g(x)e^{-ax} = k$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Il en résulte que $g(x) = ke^{ax}$, pour tout réel x.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On a représenté ci-contre les courbes représentatives de quatre fonctions f, g, h et t, solutions de l'équation $y' = 0.3y$.
Donner les expressions des fonctions f, g, h et t.



Activité 4

1. a. Résoudre l'équation différentielle $(E): 2y' + 3y = 0$.

b. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = -3$.

c. Représenter graphiquement cette solution.

2. Reprendre la question précédente pour l'équation $(E): y' = 0$.

Théorème

Soit a un réel non nul. Pour tous réels x_0 et y_0, l'équation $y' = ay$ admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0.

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Démonstration

Soit f une solution de (E) qui prend la valeur y_0 en x_0.

Alors $f(x) = ke^{ax}$, pour tout x de $\mathbb{R}$ et $ke^{ax_0} = y_0$. Il en résulte que $k = y_0 e^{-ax_0}$.

Par suite l'unique solution de (E) qui prend la valeur y_0 en x_0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Représenter graphiquement la fonction f dont la courbe C_f passe par le point $A(1,2)$ et telle que la tangente en tout point M de C_f a un coefficient directeur égal au double de l'ordonnée de M.

Activité 6

On considère une substance radioactive. On désigne par $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs existants dans la substance à l'instant t (exprimée en années) et par N_0 le nombre de noyaux existants à $t = 0$.

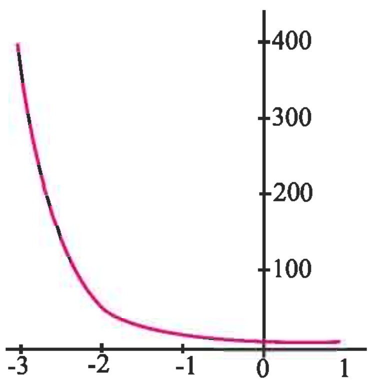
On constate que la vitesse $N'(t)$ de désintégration des noyaux à l'instant t est proportionnelle au nombre $N(t)$, avec un coefficient de proportionnalité égal à $-\lambda$ où le réel strictement positif λ est appelé constante radioactive du noyau.

1. Donner l'expression de $N(t)$.
2. Déterminer, en fonction de λ, le temps $T_{0.5}$ au bout duquel la moitié des noyaux s'est désintégrée. ($T_{0.5}$ est appelé durée de demi-vie de la substance).
3. On suppose que la substance radioactive est du carbone 14.
   a. Déterminer λ sachant que $T_{0.5} = 5730$.
   b. Déterminer l'âge d'un fragment d'os qui contient 60% de la quantité initiale.

II. Equations différentielles du type $y' = ay + b$, où a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$

Activité 1

On a représenté ci-contre la fonction $f : x \mapsto e^{-2x} + 3$.



1. Montrer que f vérifie l'équation différentielle $(E) : y' = -2y + 6$.
2. Montrer que g est solution de (E), si et seulement si, $h : x \mapsto g(x) - 3$ est solution de l'équation différentielle $y' = -2y$.
3. Donner toutes les solutions de (E).

Théorème

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.
De plus pour tous réels x_0, y_0, la fonction $f : x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$ est l' unique solution de $y' = ay + b$, telle que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration

Soit a non nul.

L'équation différentielle (E): $y' = ay + b$, est équivalente à l'équation différentielle

$(E_1) : \left(y + \frac{b}{a}\right)' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$.

On en déduit qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f + \frac{b}{a}$ est solution de (E_1). Il en résulte que les solutions de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.

Si f est une solution de (E) prenant la valeur y_0 en x_0, alors

$f(x_0) = ke^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0$. On en déduit que $k = (y_0 + \frac{b}{a})e^{-ax_0}$, ou encore que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$.

Activité 2

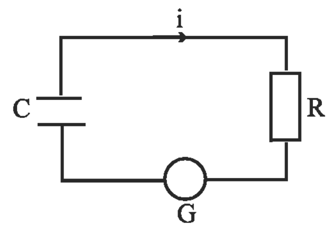
Donner, dans chacun des cas ci-dessous, la solution f de l'équation différentielle et la représenter.

a. $\sqrt{2}y' - 2y = 1$, $f(0) = -1$.

b. $\sqrt{2}y' - 2y = 1$, $f(0) = -\frac{1}{2}$.

Activité 3

Un circuit électrique est constitué d'un générateur G délivrant une tension E, d'un condensateur C et d'une résistance R.



On désigne par $i(t)$ l'intensité du courant électrique à l'instant t (en seconde) et par $q(t)$ la charge à l'instant t.

1. Donner une relation entre $i(t)$ et $q'(t)$.
2. Montrer que $Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)=E$.
3. Donner l'expression de $q(t)$, puis de $i(t)$.
4. Représenter $t \mapsto i(t)$ si l'on sait que $i(0)=10$ mA.

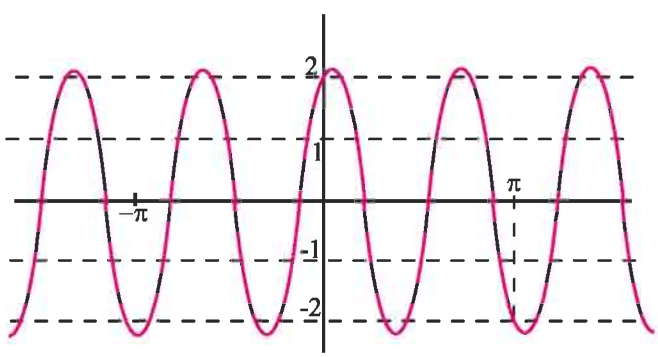
III. Equations différentielles du type $y''+\omega^2 y=0$, ω réel

Activité 1

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x + \cos x$.
   a. Déterminer les réels $r>0$ et φ appartenant à $]-\pi,\pi]$ tels que $f(x)=r\cos(x-\varphi)$ pour tout réel x.
   b. Ecrire f'' en fonction de f.
   c. Représenter la fonction f.
2. Reprendre les questions précédentes pour la fonction $g : x \mapsto \sqrt{3}\sin(2x)-\cos(2x)$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe représentative d'une fonction de la forme $f : x \mapsto a\sin(3x)+b\cos(3x)$.



1. Déterminer les réels a et b.
2. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et trouver une relation entre f'' et f.

Vocabulaire

Une équation de la forme $y''+\omega^2 y=0$, où l'inconnue y est une fonction et ω est un réel, est appelée équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Résoudre une équation de la forme $y''+\omega^2 y=0$, c'est trouver toutes les fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui la vérifient.

Activité 3

On considère l'équation différentielle $(E): y'' + 9y = 0$, où l'inconnue y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montrer que pour tous réels a et b, la fonction $f : x \mapsto a\sin(3x) + b\cos(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

   b. On suppose que $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0) = \frac{3}{2}$. Déterminer a et b.

   c. En déduire les réels $r > 0$ et φ appartenant à $]-\pi, \pi]$ tels que $f(x) = r\cos(3x - \varphi)$ pour tout réel x.

   d. Représenter f.

Activité 4

Soit ω un réel non nul, x_0 et y_0 deux réels.

On considère l'équation différentielle $(E): y'' + \omega^2 y = 0$

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x) + x_0\cos(\omega x)$

est solution de (E).

Vérifier que $f(0) = x_0$ et $f'(0) = y_0$.

2. On suppose qu'il existe une autre fonction g solution de (E) qui vérifie $g(0) = x_0$ et $g'(0) = y_0$.

Soit h la fonction définie par $h(x) = \omega^2\left(f(x) - g(x)\right)^2 + (f'(x) - g'(x))^2$.

a. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que pour tout réel x,
$h'(x) = 2\omega^2\left(f'(x) - g'(x)\right)(f(x) - g(x)) + 2\left(f''(x) - g''(x)\right)\left(f'(x) - g'(x)\right)$.

b. En déduire que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer $h(0)$ et conclure.

Théorème

Soit ω un réel non nul et x_0, y_0 deux réels.

L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = x_0$ et $f'(0) = y_0$.

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x) + x_0\cos(\omega x)$.

Conséquence

Soit ω un réel non nul.

La fonction nulle est l'unique solution de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ qui vérifie $y(0)=y'(0)=0$.

Activité 5

1. a. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y''+4y=0$,telle que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

b. Représenter f.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x)=1$, $f(x)=-1$.

2. Reprendre les questions précédentes pour la solution g de l'équation différentielle $y''+\pi^2 y=0$, qui vérifie $g(0)=0$ et $g'(0)=1$.

Activité 6

Soit ω un réel non nul et l'équation différentielle $(E): y''+\omega^2 y=0$.

A/ 1. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(\omega x)$ et $x \mapsto \sin(\omega x)$ sont des solutions de (E).

2. Montrer que pour tous réels A et B la fonction $x \mapsto A\sin(\omega x)+B\cos(\omega x)$ est une solution de (E).

B/ Soit f une solution de (E).

1. Montrer que pour tous réels A et B la fonction g définie pour tout réel x par $g(x)=f(x)-A\sin(\omega x)-B\cos(\omega x)$ est une solution de (E).

2. a. Déterminer $g'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b. En déduire qu'il existe un unique couple (A,B) de réels tel que $g(0)=g'(0)=0$.

3. Montrer alors que les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto A\sin(\omega x)+B\cos(\omega x)$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

Théorème

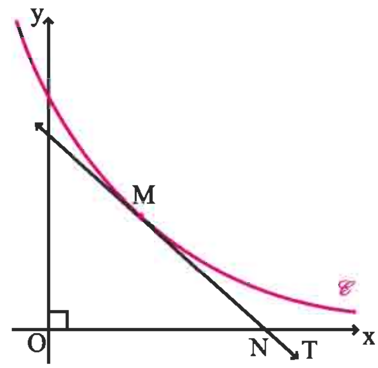
Soit ω un réel non nul.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=A\sin(\omega x)+B\cos(\omega x)$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

Activité 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+9y=0$.
2. Montrer qu'il existe une seule solution de (E) telle que $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.
3. Existe-il une solution de (E) telle que $f(0)=\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1$?

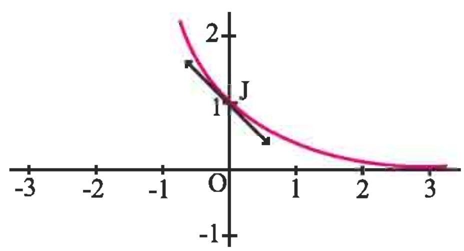
Problème résolu 1



Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé. Si la tangente T à $\mathscr{C}$ en un point M coupe l'axe des abscisses en un point N, on appellera « sous tangente en M » le nombre x_N-x_M.

1. Dans cette question, la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y=e^{-x}$.
   a. Calculer la sous tangente au point d'abscisse 0.
   b. Montrer que la sous tangente en tout point de la courbe d'équation $y=e^{-x}$ est une constante que l'on précisera.
2. Dans cette question, on donne un réel $a\neq 0$ et on se propose de déterminer des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ dont les courbes représentatives admettent en tout point une sous tangente constante égale à a.
   Soit $y=f(x)$ l'équation d'une telle courbe avec $f'(x)\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   a. Soit $x_0\in\mathbb{R}$, calculer la sous tangente au point M_0 d'abscisse x_0 et vérifier que l'on a $f(x_0)=-af'(x_0)$.
   b. En déduire que f est une solution de l'équation différentielle $y'=-\frac{1}{a}y$
   c. Résoudre cette équation différentielle.

Solution



1. a. On pose J le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.
La tangente T à $\mathscr{C}$ en J a pour équation $y=-x+1$.
La tangente T coupe l'axe des abscisses en $I(1,0)$.
On en déduit que la sous tangente à $\mathscr{C}$ au point J est le réel $x_J-x_O=1$.

b. Soit T une tangente à $\mathscr{C}$ en un point M d'abscisse a.
La tangente T a pour équation $y=-e^{-a}(x-a)+e^{-a}$ ou encore $y=-e^{-a}x+e^{-a}(1+a)$.
La tangente T coupe l'axe des abscisses au point N tel que $x_N=1+a$.
On en déduit que $x_N-x_M=1$.
Le résultat en découle.

2. a. La tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0 a pour équation

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

De l'hypothèse $f'(x_0) \neq 0$ on déduit que (T) coupe l'axe des abscisses au point N

d'abscisse $x_N = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Par conséquent $x_N - x_0 = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Ainsi $\mathscr{C}$ admet en M_0 une sous tangente égale à a, si et seulement si, $-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = a$

Autrement dit $f(x_0) = -af'(x_0)$

b. f admet en tout point d'abscisse x_0 une sous tangente égale à a, si et seulement si, la relation $f(x_0) = -af'(x_0)$ est vérifiée pour tout x_0 dans $\mathbb{R}$,

autrement dit f est une solution de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{a}y$.

c. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = -\dfrac{1}{a}y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{1}{a}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Problème résolu 2

Un mobile se déplace sur un axe horizontal $(x'x)$ avec un mouvement uniformément varié.

On désigne par $x(t)$ la position du mobile à l'instant, $x'(t)$ sa vitesse et $x''(t)$ son accélération. (t est exprimé en secondes et $x(t)$ en mètres).

On suppose de plus qu' à tout instant t, l'accélération $x''(t)$ est proportionnelle à $x(t)$ de coefficient $-\dfrac{\pi^2}{4}$.

1. Donner l'équation horaire du mouvement si l'on sait que $x(1) = 2$ et $x(2) = 0$.
2. déterminer la position et la vitesse du mobile à l'instant $t = 0$.
3. Représenter $t \mapsto x(t)$.

Solution

1. La fonction $x \mapsto x(t)$ est la restriction à $\mathbb{R}_+$ de la solution de l'équation différentielle

$x'' + \dfrac{\pi^2}{4}x = 0$ qui vérifie $x(1) = 2$ et $x(2) = 0$.

Il existe deux réels A et B tels que $x(t)=A\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)+B\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\in\mathbb{R}_+$.

De l'hypothèse $x(1)=2$ et $x(2)=0$ on en déduit que $A=2$ et $B=0$.

Par conséquent l'équation horaire du mouvement est $x(t)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right),\ t\geq 0$.

2. • A l'instant $t=0,\ x(0)=0$, c'est-à-dire le mobile est à l'origine du repère.

• Pour tout $t\geq 0,\ x'(t)=\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Par conséquent $x'(0)=\pi$, c'est-à-dire la vitesse à l'instant $t=0$ est $\pi\ \text{m/s}$.

3. La fonction $t\mapsto 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ est périodique dont 4 est une période, il suffit donc de l'étudier sur $[0,4]$. Pour tout $t\geq 0,\ x'(t)=\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Tableau de variation de f sur $[0,4]$.

	0		1		3		4
x'(t)		+	0	−	0	+	
x(t)	0	↗	2	↘	−2	↗	0