

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Matière : Mathématique	Série 1 : Calcul intégral	Professeur : M. DiamBa
Groupe Excellence (cours en ligne)		Niveau : TS1

Exercice 1 :

1.) Effectuer la division euclidienne et en déduire une primitive de la fonction f .

$$a) f(x) = \frac{2x^2-5x+6}{x-3} \quad b) f(x) = \frac{2x^3-x^2+2}{x^3+1} \quad c) f(x) = \frac{x^9-x^5+6x^4-1}{x^5-x+1}$$

2.) Déterminer les réels α et β annulant le dénominateur et décomposer $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = a + \frac{b}{x-\alpha} + \frac{c}{x-\beta} \text{ puis en déduire une primitive de } f.$$

$$a) f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad b) f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x} \quad c) f(x) = \frac{x+1}{x^2-x-3} \quad d) f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-2x-8}$$

Exercice 2 :

Calculer l'intégrale donnée :

$$\int_2^7 (x^3 - 7x + 15) dx ; \int_{-1}^0 \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^2} dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt ;$$

$$\int_{-3}^3 x^3 e^{x^2} dx ; \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+1} ; \int_2^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx ; \int_0^2 \frac{x+1}{2x^2+4x+5} dx ; \int_0^1 \frac{dv}{4-v^2} ;$$

$$\int_0^1 \frac{t^3-4t^2+2t+1}{t+1} dt ; \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt ; \int_0^2 (1-|x-1|)^3 dx ; \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt ;$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^4 x) \sin x dx ; \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}} ; \int_{-4}^0 x\sqrt{x+4} dx ; \int_0^2 \frac{\theta d\theta}{\sqrt{2-\theta}} ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{5-3 \sin y} dy ;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \sin^3 x dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos 2t \cos 3t dt ; \int_0^1 (x^2+1)e^x dx ; \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx ;$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos t)dt}{(t+\sin t) \ln(t+\sin t)}$$

Exercice 3 :

(Les questions sont indépendantes)

1. Soit f une fonction continue sur $[0 ; 1]$ telle que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$.

Montrer qu'il existe un point c de $[0 ; 1]$ tel que $f(c) = c$.

2. On considère les intégrales : $A = \int_0^x e^t \cos 2t dt$ et $B = \int_0^x e^t \sin 2t dt$.

À l'aide de la formule d'intégration par parties appliquée à A et à B , établir deux relations entre A et B . En déduire les valeurs de A et B .

3. Soit $F(x) = \int_0^x e^{3t} \sin 2t dt$. Prouver, en effectuant une double intégration par parties, que :

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



$F(x) = G(x) - \frac{4}{9}F(x)$, où G est une fonction que l'on déterminera. En déduire $F(x)$.

4. a) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$. Calculer $I = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$.

b) En intégrant par parties, calculer $J = \int_1^2 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$.

5. a) Prouver que : $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt = \frac{1}{4}$.

b) On pose $L = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos^2 t dt$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin^2 t dt$. Calculer $L+K$ et $L-K$. En déduire L et K .

6. Déterminer la primitive F de la fonction $f: x \mapsto e^{-x} \cos x$, qui s'annule en 0.

7. On pose $g(x) = xf(x)$. Calculer $g'(x)$. En déduire l'intégrale $I = \int_e^{e^4} \left(\sqrt{\ln x} + \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \right) dx$.

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx$.

1. Montrer que: $\forall x \in [0, 1], 0 \leq x^n \sin \pi x \leq x^n$. En déduire la limite de I_n en $+\infty$.

2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 I_n$.

Exercice 5 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$.

1.) Prouver qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$.

En déduire la valeur de I_0 .

2.) Démontrer que $2nI_n = (2n - 1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$. En déduire I_2 .

Exercice 6 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} dx$, $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$.

Calculer, en fonction de a , I_0 , I_1 et I_2 . Montrer que $I_n = \frac{1}{n} - aI_{n-1}$. En déduire I_3 .

Exercice 7 :

Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . On pose, pour tout $n \geq 1$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{x+n} dx ; J_n = \int_0^1 x^n f(x) dx ; K_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx} dx.$$

À l'aide de majorations de $|I_n|$, $|J_n|$ et $|K_n|$, montrer que les suites (I_n) , (J_n) et (K_n) convergent vers 0.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Exercice 8 :

- 1.) Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ dans \mathbb{R}_+ ($a < b$).
 - a) Montrer que si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est identiquement nulle sur $[a ; b]$.
 - b) Calculer $\int_{-5}^5 (x^3 + x)e^{x^2} dx$.
- 2.) Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ ($a < b$) telle que $\left| \int_a^b f(t)dt \right| = \int_a^b |f(t)|dt$.
Montrer que f garde un signe constant sur $[a ; b]$.

Exercice 9 :

Déterminer la limite de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants :

$$a) U_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \quad b) U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad c) U_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+2k)^3}$$

Exercice 10 :

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \quad \text{et} \quad u_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

- 1.) Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 2.) Déterminer $\ln u_n$ et prouver que (u_n) est convergente.

Exercice 11 : (BAC 2004)

Pour tout entier naturel $n > 1$, on pose

$$U_n = 2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- 1.) Etablir que $\left| U_n - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{2}{2n+3}$.
- 2.) Soit $J = \int_0^1 \varphi(x) dx$ avec $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On désigne par F la primitive de φ nulle en 0 et soit G la fonction définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ par $G(V) = F(\tan V)$.
 - a) Montrer que G est dérivable et déterminer sa dérivée G' . Quelle est la valeur de G ?
 - b) En déduire la valeur de J puis montrer que la suite (U_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 12 :

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



1.) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{1-x}^{1+x} f(t) dt$.

2.) Déterminer les ensembles de définition et étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \quad b) g(x) = \int_x^{x^2+x} e^{1/t} dt.$$

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$.

1.) Justifier que f est définie sur \mathbb{R}^* puis que f est paire.

2.) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \ln 2 + \int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$.

Déduire que l'on peut prolonger f par continuité en 0. Le prolongement obtenu est-il dérivable en 0 ?

3.) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$. Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4.) Etudier les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.

Exercice 14 :

1.) Montrer que la fonction $f: x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est définie sur \mathbb{R} et est impaire.

2.) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} . Calculer f' et étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$. On montrera que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0.

3.) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. $\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Exercice 15 :

1.) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) , l'unité de longueur étant 5cm. Soit (P) la parabole d'équation : $y = x^2$ et (P') la parabole d'équation : $y = -x^2 + 4x + 8$. Calculer l'aire du domaine D compris entre (P) et (P') .

2.) Soit h et R des réels tels que $0 < h < R$. L'espace est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J, K) . Calculer le volume de la partie D , ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient :

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ et } z \geq h.$$

Exercice 16 :

Soit la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x^2} dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1.) Justifier l'existence de I_n .

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



2.) Soit la fonction f définie sur $]0 ; 1]$ par $f(x) = x \ln x$. Montrer que : $\forall x \in]0 ; 1]$, $|f(x)| \leq \frac{1}{e}$.

3.) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|I_n| \leq \frac{1}{ne}$. Démontrer que (I_n) est convergente.

Exercice 17 : (Intégrales de Wallis)

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

1.) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.

2.) Au moyen d'une intégration par parties, établir une relation entre I_n et I_{n+2} . En déduire une expression explicite de I_n . Montrer aussi que pour tout n , $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.

3.) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}.$$

4.) On pose $P_n = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \dots \times \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1}$.

Vérifier que $P_n = \frac{\pi I_{2n+1}}{2 I_{2n}}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Exercice 18 :

Soit la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$. En déduire que $I_n = \frac{2^{2n+2} n! (n+1)!}{(2n+3)!}$.

Exercice 19 :

1.) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a ; b]$ et λ un nombre réel quelconque. Mettre l'intégrale $\int_a^b [f(t) + \lambda g(t)]^2 dt$ sous la forme d'un polynôme en λ ordonné suivant les puissances décroissantes de λ . En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\left[\int_a^b f(t)g(t) dt \right]^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \cdot \int_a^b g^2(t) dt.$$

2.) Montrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, $\sqrt{ab} \ln \frac{b}{a} \leq b - a$.

3.) Soit $f : [a ; b] \rightarrow]0 ; +\infty[$ continue. Montrer que : $(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{dt}{f^2(t)} \right)$.

4.) Soit f une fonction dérivable sur $[a ; b]$ avec $a < b$, $f(a) = 0$ et telle que f' soit continue sur $[a ; b]$.

a) Montrer que : $\forall x \in [a ; b]$, $[f(x)]^2 \leq (x-a) \int_a^b f'^2(t) dt$.

b) Montrer que : $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^2 x \leq \frac{\pi}{4} x$.

C.I.A.M p. 319-320, Exercices N° 52-53-54-55.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Problème 1 :

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}_+^* . On définit la fonction F sur \mathbb{R}_+^* par $F(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t} dt$.

- 1.) Montrer que F est dérivable puis calculer $F'(x)$.
- 2.) Définir F dans les cas suivants : a) $f(t) = \frac{1}{t}$ b) $f(t) = 1$.
- 3.) On étudie le cas où $f(t) = \cos t$ [on ne cherche pas à calculer $F(x)$].
 - a) Déterminer les signes de $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
 - b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{f(t)}{t}\right| \leq \frac{1}{t}$ et que $|F(x)| \leq \ln 3$.
 - c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln 3 - F(x) = 2 \int_x^{3x} \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t} dt$ et que $0 \leq \ln 3 - F(x) \leq 2x^2$. En déduire que F admet une limite à droite en 0.
- 4.) Soit G la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $G(x) = F(x)$ et $G(0) = \ln 3$.
 - a) En utilisant une intégration par parties, établir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|G(x) - \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x}\right| \leq \frac{2}{3x}$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|G(x)| \leq \frac{2}{x}$ puis étudier la limite de G en $+\infty$.
 - b) Démontrer que G est dérivable sur \mathbb{R}_+ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $G'(x) = \frac{-4 \sin^2 x \cos x}{x}$.
 - c) Étudier les variations de G sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que G admet un zéro sur $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Problème 2 :

Partie A :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

- 1.) Justifier que f est définie sur \mathbb{R} , puis que f est impaire.
- 2.) Montrer que f est bijective et que $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
- 3.) Montrer que $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Partie B :

On pose $g_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$.

- 1.) Représenter graphiquement, sur un plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 2cm les courbes C_0, C_1, C_2 représentatives de g_0, g_1, g_2 .
- 2.) Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.
- 3.) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 g_n(x) dx$. Calculer u_1 .

Groupe Excellence



Excellez avec les meilleurs professeurs !

- 4.) Montrer que : $\forall n \geq 2, n u_n + (n - 1)u_{n-2} = \sqrt{2}$. (On pourra utiliser une intégration par parties). En déduire u_2 et u_3 .
- 5.) Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$. Trouver la limite de la suite (u_n) .

Partie C :

- 1.) Pour tout entier naturel n , on appelle h_n la restriction de g_n à $[0 ; 1]$. Montrer que h_n définit une bijection de $[0 ; 1]$ sur un intervalle que l'on précisera.
- 2.) Ecrire explicitement les fonctions h_0^{-1} , h_1^{-1} et h_2^{-1} .
- 3.) Étudier et représenter graphiquement ces trois fonctions sur le même plan que C_0 , C_1 , C_2 .