

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Matière : Mathématique	Coniques	Professeur : M. Sylla
Groupe Excellence (cours en ligne)		Niveau : TS1

Exercice 1 :

Soit $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un repère orthonormé direct de l'espace orienté, $M(x, y, z)$ un point de l'espace, H son projeté orthogonal sur le plan (ABC) et K son projeté orthogonal sur la droite (AB).

- 1) On désigne par G l'isobarycentre de A, B et C.
 - a) Vérifier que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).
 - b) Vérifier que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{OG}$; en déduire que $|\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{OG}| = \frac{1}{\sqrt{3}} MH$.
 - c) Calculer en fonction de x, y et z la distance MH du point M au plan (ABC).
- 2) a) Exprimer MK en fonction de $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\|$.
- b) En déduire que $MK = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2z^2 + (1-x-y)^2}$.
- 3) On se place dans le plan (OAB) et on considère l'ensemble (E) des points de ce plan qui sont équidistants du point O et du plan (ABC).
 - a) Montrer que (E) ne contient aucun point de la droite (AB).
 - b) Soit M un point de (OAB) n'appartenant pas à (AB). Calculer la valeur du rapport $\frac{MH}{MK}$.
 - c) En déduire que (E) est une conique dont donnera un foyer, la directrice associée et l'excentricité.

Exercice 2 :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) On considère la courbe (H) d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.
Justifier que (H) est une conique dont on donnera un foyer, la directrice associée et l'excentricité.

Construire (H).

- 2) On étudie en fonction du temps t le mouvement du point $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, du plan tel que :

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos 2t} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan 2t \end{cases} \text{ où } t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

- Montrer que la trajectoire (Γ) de M est une partie de (H) que l'on précisera.
- Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ et en déduire la tangente à (Γ) au point point d'abscisse 2.
- Déterminer les coordonnées du vecteur accélération et vérifier que le mouvement est accéléré.

Exercice 3 :

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct.

- On considère les points $A(-1,0)$ et $I(4,0)$. Soit (E) l'ellipse de centre I dont A est un sommet et O un foyer.
 - Déterminer les trois autres sommets de (E) .
 - Calculer l'excentricité de (E) et donner une équation de sa directrice associé au foyer O dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 - Donner une équation de (E) dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 - Tracer (E) ; préciser les points d'intersection de (E) et de la droite $(O; \vec{v})$.
- Soit $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z : $Z^2 - 2(4 + 5\cos\theta)Z + (4\cos\theta + 5)^2 = 0$, θ est un paramètre réel.
 - Résoudre cette équation pour $\theta \in [0, \pi]$.
 - Lorsque $\theta \in]0, \pi[$, on note Z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et Z_2 l'autre solution.

Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives Z_1 et Z_2 .

Déterminer les coordonnées de M_1 en fonction de θ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

En déduire l'ensemble des points M_1 puis celle des points M_2 lorsque θ varie dans $]0, \pi[$.

Exercice 4 :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on donne les points $C\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et $E(0, 1, 0)$.

- Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(x, y, z)$ tels que $\|\vec{MC} \wedge \vec{MD}\| = \|\vec{ME}\|$.
- Déterminer l'intersection (Δ) de (Γ) avec le plan $(O; \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
 - Montrer que les points de (Γ) sont à égale distance de E et de la droite (CD) .

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



b) Montrer l'intersection de (Γ) et du plan d'équation $z = 0$ est la parabole de F et de directrice (CD) .

Exercice 5 :

Partie A :

Soit a un réel non nul, u et v deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$(0.1) \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = au \end{cases}$$

1) a) Montrer que u et v vérifient l'équation différentielle

$$(0.2) \quad y'' - ay = 0.$$

b) Résoudre l'équation (0.2) selon les valeurs de a .

2) On suppose que $a = 1$. Déterminer u et v sachant que $u(0) = 3$ et $v(0) = 0$.

Partie B :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

Soit (Γ) l'ensemble des points M de P dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$(0.3) \quad \begin{cases} x(t) = \frac{3}{2}(e^t + e^{-t}) \\ y(t) = \frac{3}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases} \quad t \geq 0.$$

L'objet de cette partie est de calculer l'aire du domaine plan délimité par (Γ) et les droites d'équation $y = 0$, $x = 3$ et $x = 5$.

1) a) Démontrer que (Γ) est une partie de la conique dont une équation est :

$$(0.4) \quad x^2 - y^2 - 9 = 0.$$

c) Préciser la nature de cette conique ainsi que ses éléments géométriques caractéristiques. Construire (Γ) .

Exercice 6 :

Dans un plan complexe orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2 cm.)

On considère la courbe (C) d'équation :

$$4x^2 + 3y^2 + 6y - 9 = 0.$$

1) a) Déterminer la nature de (C) .

b) Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de (C) .

c) Tracer (C) .

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



2) Soit M un point (C) d'affixe $z = x + iy$, x et y étant des réels.

a) Démontrer que $|z| = \frac{1}{2}(3 - y)$

b) En déduire que $|z| = \frac{3}{2 + \sin \theta}$, θ étant un argument de z .

3) a) Soit M' et M'' deux points de (C) d'affixes respectives z' et z'' , d'arguments respectifs θ et

$\theta + \pi$.

Calculer la distance $\|M'M''\|$ en fonction de θ .

b) Déterminer $M'M''$ si $OM' = 2$.

Exercice 7 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (unité : 2 cm). On considère l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z - 1 - i| = \frac{1}{4}|z + i\bar{z} - 8(1 + i)|$ (1)

1) a) Montrer que l'ensemble des points d'affixe z tels que $z + i\bar{z} - 8(1 + i) = 0$ est une droite (Δ) .

b) En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrer que (E) est une conique de foyer le point F d'affixe $1 + i$, de directrice la droite (Δ) et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

2) a) Préciser l'axe focal (D) de (E) .

b) Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $2 + 2i$ et $-2 - 2i$ sont deux sommets de (E) .

c) Placer ces éléments sur une figure et construire géométriquement les sommets de (E) situés sur l'axe non focal.

d) Donner l'allure de (E) en précisant les tangentes aux sommets.