

Série d'exercices sur : COURBES PARAMETREES



Exercice 1

Etudier et représenter graphiquement les courbes paramétrées suivantes :

$$1-) \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t, t \in \mathbb{R} \end{cases} ; 2-) \begin{cases} x(t) = 2 + \sin 2t \\ y(t) = 1 - \sin t \cos t, t \in \mathbb{R} \end{cases} ; 3-) \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos 3t, t \in \mathbb{R} \end{cases} ;$$

$$4-) \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\sin t}{2 + \cos t}, t \in \mathbb{R} \end{cases} ; 5-) \begin{cases} x(t) = \tan \frac{t}{2} \\ y(t) = \sin t, t \in \mathbb{R} \end{cases} ; 6-) \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \\ y(t) = t + \frac{1}{t}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice 2

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.

On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z associe le

point M d'affixe $Z = \frac{1}{2}z^2 - z$. L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1. Soit t un réel dans $[-\pi; \pi]$ et m le point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $z = e^{it}$.

1-) Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cos 2t - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \sin t, t \in [-\pi; \pi] \end{cases}$$

2-) Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.

En déduire que (Γ) admet axe de symétrie que l'on précisera.

3-) Etudier les variations de $x(t)$ et de $y(t)$ sur $[0; \pi]$.

4-) Dresser le tableau de variation simultané de x et y sur $[0; \pi]$.

5-) Placer les points de (Γ) correspondants aux valeurs $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (Γ) est horizontale). Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0, \pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1. A

tout point T de $(\mathcal{C})$, on associe la mesure principale θ de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OT})$ et le projeté orthogonal M du point A(1; 0) sur la tangente en T à $(\mathcal{C})$.

1-) Montrer que les coordonnées de M $(x(\theta), y(\theta))$ sont :

$$\begin{cases} x(\theta) = -\cos^2 \theta + \cos \theta + 1 \\ y(\theta) = \sin \theta (1 - \cos \theta) \end{cases}$$

2-) Etudier les variations de x et y sur $[0, \pi]$.

3-) On note (Γ) la courbe décrite par M lorsque T décrit $(\mathcal{C})$.

a-) Montrer que $A \in (\Gamma)$. (On admettra que (OA) est la tangente en A à (Γ)).

b-) Tracer (Γ) dans le repère.

Exercice 4 [La conchoïde de Nicomède]

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$. On considère la droite (Δ) d'équation $x = 1$. Une droite (D) variable, passant par O , coupe la droite (Δ) en A . On note M le point de (D) tel que $AM = 2$, A étant situé sur le segment $[OM]$.

La courbe (C) , lieu géométrique des points M lorsque (D) varie, est appelée la **Conchoïde de Nicomède**.

1-) On note t la mesure de l'angle $(\vec{OI}, \vec{OA})$. Montrer que (C) admet une représentation paramétrique donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = \tan t + 2\sin t \end{cases}, \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

2-) a-) Vérifier que (C) admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

b-) Etudier les variations de x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis tracer la courbe (C) .

Exercice 5 [Spiral logarithmique]

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe paramétrée (Γ) définie par le système d'équations paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1-) Par quelle transformation passe-t-on de $M(t)$ à $M(t + 2\pi)$ et à $M(t - 2\pi)$?

2-) Etudier les variations $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ pour $t \in [0; 2\pi]$ et dresser le tableau de variation conjointe.

3-) Construire la courbe représentative de (Γ) constituée des points $M(t)$ pour $t \in [0; 2\pi]$

4-) Déduisez-en la partie de la courbe de (Γ) constituée des points $M(t)$ pour $t \in [-2\pi; 2\pi]$

5-) Soit M_t le point de (Γ) de paramètre t et $\vec{V}_t$ le vecteur dérivé lui correspondant.

Calculer la norme du vecteur $\vec{OM}_t$ et montrer que l'angle $(\vec{OM}_t, \vec{V}_t)$ est constant.

Exercice 6

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal. Un point A sur l'axe des abscisses et un point B sur l'axe des ordonnées sont tels que $AB = 1$. On note M le projeté orthogonal de O sur $[AB]$. On se propose de déterminer le lieu géométrique (C) des points M lorsque A et B se déplacent chacun sur son axe.

1-) On note (x, y) les coordonnées du point M et t une mesure de l'angle $(\vec{AB}, -\vec{i})$.

Montrer que (C) est l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \sin^2 t \\ y(t) = \sin t \cos^2 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2-) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, comparer la position des points : $M(t)$ et $M'(t + 2\pi)$; $M(t)$ et $M'(-t)$; $M(t)$ et $M'(\pi - t)$; $M(t)$ et $M'\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

En déduire qu'il suffit de faire l'étude pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et construire la partie de la courbe de (C) correspondante. Indiquer les transformations qui permettent de compléter la courbe.

3-) Etudier les variations de x et y sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

4-) Tracer la courbe (C) en précisant les points où la parallèle à l'un des axes ainsi que les tangentes à l'origine.

Exercice 7 [Strophoïde de droite]

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On considère le cercle (C) de centre I et de rayon 1 et la droite (Δ) d'équation $x=1$. Une droite variable (D) passant par O coupe le cercle (C) en A et la droite (Δ) en A'.

On note M le point de (D) tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AA'}$. La courbe (S) lieu géométrique des points M lorsque (D) est une **strophoïde de droite**.

Paramétrage N1

1-On note t la pente de la droite (D).

Montrer que les coordonnées de M sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ y(t) = \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

a-) Vérifier que S admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

b-) Etudier les variations des fonctions $t \rightarrow x(t)$ et $t \rightarrow y(t)$ pour $t \in [0, +\infty[$, et construire la courbe S.

2-) Calculer la distance de M à la droite (Δ), puis la limite de cette distance lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Interpréter graphiquement.

Paramétrage N2

1) On θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$. Montrer que les coordonnées sont données par :

$$\begin{cases} x(\theta) = -\cos 2\theta \\ y(\theta) = \sin 2\theta + \tan \theta \end{cases}, \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

(On évaluera l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{IA})$)

2)a) Vérifier que (S) admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

b) Etudier les variations des fonctions $\theta \mapsto x(\theta)$ et $\theta \mapsto y(\theta)$ pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

c) Construire la courbe (S) dans le repère.

3) Calculer la distance de M à la droite (Δ) puis la limite de cette distance lorsque θ tend vers $+\frac{\pi}{2}$

Exercice 8 [Courbe de Bézier]

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les trois points A, B et C de coordonnées respectives $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$. A tout réel $t \in [0,1]$ on associe le point $M(t)$, barycentre du système $\{(B, (1-t)^2), (A, 2t(1-t)), (C, t^2)\}$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$, (Γ) l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $[0,1]$.

1)a) Exprimer en fonction de t les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de $M(t)$.

b) Dresser le tableau de variations conjointes de x et y et tracer la courbe (Γ) ainsi que ses tangentes aux points B, C et $M\left(\frac{1}{2}\right)$.

2) Montrer que les tangentes à (Γ) en B et C se coupent en A.

3) Trouver une relation entre $x(t)$ et $y(t)$ indépendante de t. On calculera y en fonction de x et on posera $y = f(x)$. La fonction f est-elle dérivable à gauche au point d'abscisse 1 ?

Exercice 9

On considère un cercle (C) de diamètre [OA] et la droite (D) tangente à (C) en A. Pour tout point M de (C) distinct de O, la droite (OM) coupe (D) en Q. Soit P le point défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$.

On se propose de déterminer le lieu géométrique Γ de P lorsque M décrit (C) privé de O.

On pose $OA = 2a$ ($a > 0$) et on rapporte le plan au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{2a} \overrightarrow{OA}$. Soit θ la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

- 1-) Déterminer les coordonnées de M en fonction de θ .
- 2-) En déduire les coordonnées de P en fonction de θ .
- 3-) Etudier puis construire courbe Γ .

Exercice 10 [Cardioïde]

Le plan est du repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (C) la courbe paramétrée de représentation paramétrique donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t) \cos t \\ y(t) = (1 + \cos t) \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- 1-) En utilisant la parité et la périodicité des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ réduisez l'intervalle d'étude et déterminer les symétries de la courbe (C)
- 2-) Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$
- 3-) a) Montrer que, si $t \neq \pi$, la droite $\overrightarrow{OM_t}$ a pour vecteur directeur $\vec{u} = (\cos t) \vec{i} + (\sin t) \vec{j}$.
b) Déduisez en la tangente au pont $M(\pi)$ de la courbe (C) puis tracer (C).

Exercice 11 [cycloïde]

Soit (Φ) la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = 2(t - \sin t) \\ y(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- 1-) Comparer les coordonnées des points $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ et montrer que ces points correspondent dans une translation. Déduisez en l'intervalle d'étude utile
- 2-) Etudier les variations de $x(t)$; $y(t)$ et calculer le vecteur dérivée $\vec{V}(t)$
- 3-) On suppose ici que t est non nul, montrer que la droite (OM_t) admet un vecteur directeur $\vec{u}(t) = \frac{1}{t}(1 - \cos t) \vec{i} + \frac{1}{t}(\sin t) \vec{j}$. déterminer les limites des coordonnées de $\vec{u}$ et déduisez en la tangente en O à la courbe (Φ)

Exercice 12

1-) On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{e^{-x} \cos x}{2 + \sin x}$.

f étant une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose : $g(x) = e^x f(x)$.

a-) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$.

b-) Déterminer la solution générale de (E), en déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

2-) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe (Γ) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \ln(2 + \sin t) \\ y(t) = \ln(2 + \cos t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

a-) Comparer $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ ainsi que $M(t)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

b-) En déduire que la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve (Γ) et montrer que pour construire (Γ) , il suffit d'étudier x et y dans $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} + \pi\right]$.

c-) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y dans $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ et tracer la courbe (Γ) .