TS 1 / Série d'exercices : Barycentre et lignes de niveau dans géo-espace

Exercice 1

On considère un triangle ABC de l'espace tel que :

$AB = 4a$; $AC = 3a$ et $BC = 5a$; $(a \in R_+^*)$

1) Montrer que chacun des ensembles suivant est un plan.

On précisera un point et un vecteur normal

a) $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).\overrightarrow{AC} = 0$

b) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{AB} = 0$

c) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

2) Déterminer l'ensemble (P_1) des points M de l'espace tels que :

$MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 5a^2$

3) Déterminer l'ensemble (P_2) des points M de l'espace tels que :

$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -5a^2$

Exercice 2

On donne, dans l'espace, quatre points A, B, C et D, non coplanaires. Soit I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD].

1) *Peut-on avoir I = J ? Justifier votre réponse.*
2) *Soit G le milieu de [IJ]. Existe-t-il des points de l'espace tels que :*

   $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$? *Justifier votre réponse.*
3) *Déterminer l'ensemble (P_1) des points M de l'espace tels que :*

   $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$
4) *Déterminer l'ensemble (P_2) des points M de l'espace tel que :*

   $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$. *Peut-on avoir $(P_1) = (P_2)$?*

Exercice 3

ABCD est un rectangle ; AB = a et AD = 2a. Soit M un point de l'espace.

$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$

$g(M) = MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2$.

1) *Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que :* $6a^2 \leqslant f(M) \leqslant 10a^2$
2) *Déterminer l'ensemble (E_2) des points M tels que :* $g(M) = 4a^2$
3) *Quelle est l'intersection de (E_1) et de (E_2) ?*

Exercice 4

ABCDEFGH est un cube d'arête 1*, soit I le centre de ABCD.*

1) *Soit P* bar $\{A, 2\}, (C, -1)\}$. *Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.*

2) *Soit* (Γ) *l'ensemble des points M de l'espace tels que :*

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \| - \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

   a) *Déterminer l'ensemble* (Γ).

   b) *Montrer que* $A \in (\Gamma)$.

3) *Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :*

$$\|8\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$$

Exercice 5

Dans un plan (P) de l'espace, on considère le cercle (C) de diamètre [AB]. Soit Δ *la droite passant par A et perpendiculaire à (P) et S un point de* Δ *distinct de A. On note I le projeté orthogonal de A sur la droite (BS). Pour tout point M du cercle (C), on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS).*

1) *Placer les données précédentes sur une figure,* Δ *étant placée verticalement.*

2) *Prouver que H appartient à la sphère* Σ *de diamètre [AS].*

3) *Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B.*

   a) *Prouver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS).*

   b) *En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS).*

4) *Montrer que H appartient au plan* Π *passant par I et orthogonale à la droite (BS).*

5) a) *Déterminer l'intersection* Γ *de* Σ *et* Π

   b) *Prouver que l'ensemble décrit par H lorsque M parcourt (C) est égal à* Γ

Exercice 6

Soit ABCD un tétraèdre régulier tel que AB = a.

1) *Soit A' le centre de gravité du triangle BCD*

   Déterminer le réel m pour que le point G milieu de$[AA']$*soit le barycentre de (A,m), (B,1), (C,1) et (D,1).*

2) *On pose :*$f(M) = 3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$

   a) *Montrer que* $f(M) = 6MG^2 + f(G)$

   b) *Calculer AG et en déduire f(G)*

   c) *Déterminer l'ensemble* (E_1) *des points M de l'espace tels que :* $2f(M) = 5a^2$

3) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M de l'espace tel que :

$MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3MA^2 = a^2.$

Vérifier que (E_2) est le plan médiateur de $[AA']$

4) a) Déterminer l'intersection (C) de (E_1) et (E_2)

b) Prouver que les milieux respectifs I, J et K des segments $[AB]$, $[AC]$ *et* $[AD]$ *appartiennent à (C). Construire (C)*

Exercice 7

Soient A, B et C trois point non alignés du plan tels que ABC ne soit pas équilatéral.

Soient A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ *et* $[AB]$.

On pose BC = a, AC = b et AB = c. On considère le vecteur $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{AC} + c^2\overrightarrow{AB}$

1) Démontrer que : $\vec{u} = (a^2 - b^2)\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{AB}$.

En déduire que $\vec{u}$ *n'est pas le vecteur nul.*

2) Pour tout point M du plan, on pose : $f(M) = a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC'}$

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, calculer f(O).

3) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

a) Montrer que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$

b) En déduire f(G).

Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : f(M) = 0