TSI : Coniques

Exercices d'application

Exercice 1

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Trouver l'équation cartésienne de l'ellipse de foyer $F(0\,,2)$ *de directrice* $(D) : x = 5$ *et d'excentricité* $e = \frac{1}{2}$

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Donner la nature et les éléments caractéristiques des courbes d'équations :

$a)\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $b)\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; $c)\ 2x^2 + y^2 = 2$; $d)\ x^2 + x + 2y^2 + 4y = 0$

Exercice 3

Tracer l'ellipse (C) d'équation : $x^2 + 4y^2 = 25.$

1- Déterminer une équation de la tangente à (C) aux points de (C) d'abscisse $4.$

2- Déterminer une équation des tangentes à (C) ayant pour coefficient directeur $\frac{3}{8}$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, donner la définition bifocale de l'ellipse (ξ).

$a)\ (\xi) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ $\qquad$ $b)\ (\xi) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Exercice 5

Soient F et F' deux points du plan tels que : $FF' = 6$

Déterminer, dans un repère convenablement choisi, l'équation réduite de l'ellipse définie par : $MF + MF' = 8$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de l'ellipse (ξ).

a) $x^2 + 2y^2 4x - 4y = 10$

b) $4x^2 + y^2 - 8x + 6y - 3 = 0$

c) $3x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'ellipse dont on donne une représentation paramétrique.

a) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}cos\theta - 1 \\ y = \frac{3}{4}sin\theta + 2 \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$; b) $\begin{cases} x = 2cos\theta - 3 \\ y = 3sin\theta + 1 \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$

Exercice 8

1- Soit $A\binom{2}{-1}$ *et* $A'\binom{-2}{3}$*. Déterminer une équation de l'ensemble* (ξ) *des points* M *du plan tels que :* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = 1$

2- Déterminer une équation de l'image de (ξ)*:*

a) Par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O,\vec{\imath})$ *et de rapport* $\frac{2}{3}$

b) Par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O,\vec{\jmath})$ *et de rapport* 2.

Exercice 9

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$*. On considère l'ensemble* (H) *des points* $M(Z)$ *tels que :* $|Z + 2\overline{Z} + 1| = \sqrt{2}|Z + \overline{Z}|$

1- Donner la nature de (H)

2- Caractériser (H)

3- Tracer (H) *et ses directrices.*

Exercice 10

Le plan complexe (P) *est rapporté au repère orthonormé* $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A tout point M du plan d'affixe $Z \neq 0$, *on associe le point* M' *d'affixe* Z' *tel que :*

$$Z' = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{z}\right)$$

1- On pose $Z = x + iy$ *où x et y sont des réels.*

a- Exprimer en fonction de x et y la partie réelle x' *et la partie imaginaire* y' *de* Z'.

b- Déterminer l'ensemble (E) *des points M tels que* M' *appartienne à l'axe réel.*

2- On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2.

On écrit Z sous forme : $Z = 2e^{it}$, $t \in [0\,,2\pi]$

a- Exprimer x' *et* y' *en fonction de t*

b- En déduire que M' décrit une ellipse (ξ) *dont on déterminera le centre et les sommets.*

Exercice 11

1- *Résoudre dans R l'équation différentielle suivante :* $y'' + 4y = 0$ *et déterminer les solutions particulières f et g vérifiant* $f(0) = 3$ *et* $f'(0) = 0$, $g(0) = 0$ *et* $g'(0) = 4$.

2- *Soit (I) la courbe de représentation paramétrique :* $\begin{cases} x = f(\theta) \\ y = g(\theta) \end{cases}$ $, \theta \in \mathbb{R}$

Déterminer la nature de (Π) et ses éléments caractéristiques. Tracer (M).

Exercice 12

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. *on considère l'ensemble des points* $M(x, y)$ *tel que :* $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t - sint \\ y = \sqrt{2}\cos t + sint \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

1- a- *Vérifier qu'une équation cartésienne de (E) est :* $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8 = 0 \quad (1)$

b- *Vérifier que l'équation* (1) *est équivalente à*

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{x+y-4}{4}\right)^2 \qquad (2)$$

c- *Interpréter géométriquement chaque membre de* (2).

En déduire que (E) *est une conique dont on précisera la nature.*

d- *Montrer que O est le centre de symétrie de (E) et préciser ses éléments: foyers, excentricité, directrices.*

2- *Soit* f *l'application du plan orienté qui, à chaque point d'affixe Z associe le point* M' *d'affixe* Z' *telle que* $Z' = \frac{1-i}{2}Z$

a- *Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques*

b- *Déterminer l'image de* (E) *par f.*

Préciser les éléments remarquables de cette image et la construire.

Exercice 13

Dans le plan (P) *rapporté au repère orthonormé* $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, *on considère la courbe* (E) *dont une représentation paramétrique est :* $\begin{cases} x(t) = -1 + 2cost \\ y(t) = sint \end{cases}$ $\quad (t \in \mathbb{R})$

1- *Définir la fonction vectorielle F associée à* (E).

2- *Montrer que F est périodique de période* $T = 2\pi$

3-a) *par quelle transformation ponctuelle le point* $M(-t)$ *se déduit-il de* $M(t)$

b) *En déduire que F peut être étudiée sur* $[0, \pi]$

4- *Etudier les variations de x et y sur* $[0, \pi]$

5- Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0, \pi]$

6- Tracer (E).

Exercice 14

Soit (ξ) *une ellipse de foyers F, F' et de centre O.*

On note α *la longueur du grand axe et* $C = OF$.

Montrer que $M \in (\xi) \Leftrightarrow MF \times MF' + OM^2 = 2a^2 - c^2$

NB : c'est la définition tri focale de l'ellipse.

Exercice 15

Soit (ξ) *une ellipse de centre O, soit M sur* (ξ)*, on note M' le symétrique de M par rapport à l'axe focal. La normale à M coupe (en général) la droite (OM') en un unique point P.*

Quel est le lieu de P lorsque M décrit (ξ)*?*

Exercice 16

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$*, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère l'ensemble* C_α *de points* $M\binom{x}{y}$ *telles que :* $x^2 + y^2 + 2\alpha xy - 1 = 0$

1- Quelle est la nature de C_α *si* $|\alpha| < 1$*?*

2- Préciser l'ensemble C_0.

3- Préciser les ensembles C_1 *et* C_{-1}

4. On considère le repère $R_\theta = (o, \vec{u}, \vec{v})$*obtenu par rotation d'angle* θ *de R, on note* $\binom{x}{y}$ *les coordonnées de M dans ce repère. Comment choisir* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *pour que le terme en XY de l'équation* C_α *dans ce repère soit nulle ? quelle est alors l'équation de* C_α

5- En déduire les paramètres a, b, c *et* e *lorsque* $\alpha = \frac{1}{2}$

Exercices 17

Soit (ξ) *une ellipse de centre O, A et B deux points de* (ξ) *non alignés avec O, les tangentes en A et B se coupent en M.*

Montrer que M, O et le milieu I de [AB] sont alignés.

Exercices 18

Soit (δ) *une ellipse, pour* $M \in (\delta)$ *différent des sommets, la normale en M coupe le grand axe en C et le petit axe en* C'.

Montrer que le milieu de [C,C'] décrit également une ellipse (privée des sommets).

Calculer son excentricité en fonction de celle de (δ).

DEVOIRS A FAIRE A LA MAISON

Devoir n°1

Exercice n°1

Soit S l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = (1+i)Z$

1- Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.

2- Soit (E) l'ensemble des points M du plan ayant pour équation cartésienne :

$x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$

Déterminer l'ensemble (E') image de (E) par S.

3- Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E').

Exercice n°2

Dans le plan P muni du repère orthonormé $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$ on définit les points $A(1;0), B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et (D) la droite d'équation : $x = 4$.

1- Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$.

Quelle est la nature du quadrilatère ABGC ?

2- On note y l'ensemble des points $M(x,y)$du plan vérifiant :

$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2$

a- Montrer que γ est l'ensemble des points M vérifiant : $MG = \sqrt{2}d\big(M,(D)\big)$

Où $d\big(M,(D)\big)$ désigne la distance du point M à la droite (D).

b- En déduire la nature de y et préciser ses éléments caractéristiques.

Représenter ensuite y dans le repère orthonormé $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice n°3

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe (E) dont une équ cartésienne est :$21x^2 + 31y^2 - 10\sqrt{3}xy = 0$.

f désigne la similitude plane directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1- Ecrier l'expression analytique de f.

2. On désigne par (E') l'image de (E) par f.

Montrer que l'équation cartésienne de (E) est : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

3- a. Montrer que (E) est une ellipse.

b. On note A, A', B et B' les sommets de (E), préciser leurs coordonnées.

c. Préciser les foyers F et F' de (E) puis tracer (E) et (E').

Devoir n°2

Exercice n°1

Le plan (P) *est rapporté à un repère* $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

1- On note $Z = x + iy$ *l'affixe du point M de coordonnées* (x, y)

a- Vérifier que l'ensemble des points M tels que $\overline{Z} + Z + 4 = 0$ *est une droite (D).*

Tracer (D)

b- Démontrer que pour tout point M, la distance de M à la droite (D) est : $\frac{1}{2}\left|\overline{Z} + Z + 4\right|$

2- On note A le point d'affixe $1 + i$ *et (P') le plan de (P) privé de la droite (D). Soit E l'ensemble des points M d'affixe Z de (P') tel que* $\left|\frac{z-1-i}{\overline{z}+z+4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Démontrer que E est une ellipse dont en déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice n°2

Partie I:

Le plan P est orienté non rapporté à un repère orthonormé. On donne un segment [OA], A est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

B est le symétrique de C par rapport à O. I désigne le centre de gravité du triangle ABC.

1- Faire la figure

2- On considère l'ellipse (E) de foyer B et C passant par A.

a- Construire les points de (E) situés sur les demi-droites $[CI)$ *et* $[BI)$

b- Tracer (E)

c- Calculer l'excentricité

3- Construire (E') l'image de (E) par la similitude plane directe de centre C qui transforme A en O.

Partie II:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)$

1- Ecrire l'équation cartésienne de (E).

2- Ecrire l'équation cartésienne de (E').