TS1 : Transformations du plan et isométrie

Première partie : Transformations du plan.

EXERCICE

Soit ABC un triangle équilatéral. Soient Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les médiatrices respectives des segments $[AB], [BC]$ et $[CA]$. Soit O le centre de son cercle circonscrit. Les points C', A' et B' sont les milieux respectifs des segments $[AB], [BC]$ et $[CA]$.

Soient $a = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}},\right)$, $b = \left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}},\right)$ et $c = \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}},\right)$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes

$S_{(AB)} o S_{(BC)}$, $S_{(BC)} o S_{(B'C')}$, $S_{(AB)} o S_{(BC)} o S_{(CA)}$, $t_{\overrightarrow{OA}} o\, t_{\overrightarrow{OB}} o t_{\overrightarrow{OC}}$, $R_{\left(A', \frac{\pi}{2}\right)} o R_{\left(B', -\frac{\pi}{2}\right)}$

$t_{\overrightarrow{BC}} o S_{(\Delta_1)}$, $t_{\overrightarrow{OA}} o\, t_{\overrightarrow{OB}}\, o S_{(\Delta_1)}$, $S_{(\Delta_1)} o S_{(\Delta_2)}$, $R_{(A,a)} o R_{(B,b)} o R_{(C,c)}$, $t_{\overrightarrow{BA}} o R_{(C,c)}$

Deuxième partie : Isométries

EXERCICE 1

ABC un triangle rectangle et isocèle tel que mes $(AB, AC) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Notons I le milieu de$[BC]$, r_B la rotation de centre de centre B et d'angle, r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$ et $f = r_C o t o r_B$.

1) Déterminer la nature de f
2) Quelle est l'image de B par f
3) Caractériser f

EXERCICE 2

Dans le plan orienté on considère un losange ABCD tel que :

$AB = BC = CD = DA = 5$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par I, J, k, L et O les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[BD]$. On note (Δ) la médiatrice de $[AB]$ et (Δ') la médiatrice de $[CD]$.

1) Soit f l'isométrie du plan définie par : $f(A) = B$; $f(B) = D$ et $f(D) = C$
   a) Prouver que f est un antidéplacement.
   b) Démontrer que s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C et D
2) Soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$
   a) Montrons que $f = r o \sigma$
   b) A-t-on $f = \sigma o r$?
3) Soit S_1 la symétrie orthogonale d'axe (BC)
   a) Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale S_2 telle que $r = s_1 o s_2$
   b) En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s_1 o t_1$, ou t_1 est une translation que l'on précisera.
4) soit t_2 la translation du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} o f$
   a) Déterminer $g(D)$, $g(I)$, $g(O)$. En déduire la nature de la transformation g.
   b) Démontrer que $f = t_2 o g$ a-t-on $f = g o t_2$?

EXERCICE 3

Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre$[BC]$, A le point de (C) tel que $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$, A' le point diamétralement opposé à A sur (C) et $S_{(BC)}(A)=I$

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f telle que $f(A)=C$ et $f(B)=O$
   b) Montrer f est une rotation de centre I
   c) Montrer que $f(O)=A'$
2) Soit g l'antidéplacement telle que $g(A)=A'$ et $g(B)=C$
   a) Montrer que $g=S_O oS_{(AB)}$
   b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.
3) Soit E le point tel que OICE est un parallélogramme et D = f(C)

   On pose $t=f or\left(D,-\frac{\pi}{3}\right)$
a) Déterminer t(C) et caractériser t.
b) Déterminer t(E). En déduire la nature du triangle EBD

EXERCICE 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application f qui à tout point M (x, y) on associe le point M'(x', y') tel que : $\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$

On note z l'affixe de M et z' l'affixe de M'

1) a) Exprimer z' en fonction de z
   b) Démontrez que $f=ros$ où s est une réflexion d'axe $(O,\vec{u})$ et r une rotation affine à préciser.
2) En décomposant r en deux réflexions, démontrer que f est une réflexion dont on précisera l'axe.
3) Soit g l'application qui à tout point M (x, y) associe M"(x'',y''). On note par z l'affixe de M et par z" l'affixe de M"
   a) Exprimer z" en fonction de z
   b) Déterminer la nature de l'isométrie t telle que g = tof
   c) K étant le milieu du segment $[MM'']$, démontrer que K appartient à une droite fixe lorsque M décrit le plan

EXERCICE 5

Dans le plan orienté, on considère un triangle tel que AB=AC et mes$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

Soit I, J, K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, et $[AB]$.

On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

F = RoT et g = ToR.

1) Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristique des applications f et g
3) Déterminer la nature de gof^{-1}
4) Donner l'image de A par gof^{-1}

5) Soit M un point quelconque du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g. Quelle est la nature du quadrilatère ACM_1M_2.

EXERCICE 6

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que :
$mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On désigne par I le milieu de $[AC]$ et K le milieu de $[AB]$.

a) Montrer qu'il existe un unique φ antidéplacement tel que $\varphi(B) = A$ et $\varphi(A) = C$

b) Montrer que φ est une symétrie glissée dont on précisera l'axe et le vecteur

c) Soit D le symétrique de B par à I. Montrer que $\varphi(C) = D$

EXERCICE 7

Partie A

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Placer les points I, J, H, A, B, C d'affixes respectives :

$z_I = 1$, $z_J = i$, $z_H = 1 + i$, $z_A = 2$, $z_B = \frac{3}{2} + i$, $z_C = 2i$ et , $z_D = -1$

2) Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la perpendiculaire à la droite (OC) passant par D se coupent en F.
Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_F = -1 + \frac{1}{2}i$

3) Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques

Partie B

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe $z' = i\bar{z} + 2i$

4) Déterminer les images des points O, A et B par f
 a) Montrer que f est une isométrie
 b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f
 c) f est-elle une symétrie axiale ? Sinon préciser la nature de f

5) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.
 Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}

4) on pose $S = f o t^{-1}$
 a) Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = i\bar{z} + 1 + i$
 b) Montrer que I et J sont invariant par S. En déduire la nature de S
 c) En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser puis caractériser alors f

EXERCICE 8

Le plan est rapporté à un repère on considère l'application f qui à tout point M associe le point M' tel que

$$f : \begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$$

1) a) Exprimer $z' = x' + iy'$ en fonction de z ou $\bar{z}$

b) L'application f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ? Justifier votre réponse

c) Quel est l'ensemble des points invariant par f, puis conclure.

d) Quelle est la nature de la transformation fof

e) Déterminer la droite (D) telle que f = sot = tos où t est la translation de vecteur $\vec{v}$ et s la symétrie orthogonal d'axe (D).

f) Vérifier que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (D)

EXERCICE 9

PARTIE A

Soit ABCD un carré direct de centre O et f une isométrie qui laisse invariant le carré ABCD

1) Démontrer que f(O) = O. En déduire les natures possibles de f

2) Sachant que f(A) = B, f(B) = C et f(C) = D

Préciser la nature des éléments caractéristiques de f

3) Déterminer la nature de tous les isométrie laissant invariant le carré ABCD (prendre pour médiatrices respectives de prendre (Δ) et (Δ') pour médiatrices respectives de $[BC]$ et $[AB]$.

4) Le tableau de décomposition de toutes ces isométries

PARTIE B

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm, on donne les points $A(1\,;0)$, $B(-1\,;0)$, $C(0\,;-1)$ et $D(0\,;1)$ à tout point M on associe le nombre complexe z

1) a) Démonter qu'il existe une unique rotation T de centre C qui transforme A en B.

b) Déterminer l'écriture complexe de T et préciser son angle.

2) On pose $T(M) = M_1$; $T(M_1) = M_2$; $T(M_2) = M_3$

a) Que peut-on dire des droites (MM_1) et (M_1M_2) pour M distinct de C ? Justifier votre réponse

b) Quel est l'ensemble (C_1) des points M_1 du plan lorsque M décrit le cercle (C) de diamètre $[AB]$.

3) Soit N un point d'affixe $z_N = iz - (1+i)$. On note T_λ l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' barycentre des points pondérés $(M\,;\lambda)$, $(N\,;-\lambda)$, $(A\,;1)$ et λ un nombre réel non nul.

a) Démonter que l'écriture complexe de est : $z' = \lambda(1-i)z + \lambda(1+i) + 1$

b) Démontrer l'écriture complexe de T est

a) A quelle condition T_λ peut-elle être une isométrie ?

EXERCICE 10

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Soit λ un réel strictement positif on considère les points $A(\lambda\,;\,0)$, $B(\lambda\,;\,\lambda)$ et $C(0\,;\,\lambda)$ on désigne par R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S la symétrie de centre B et par R' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose f = R'oSoR

1) Quelle est la nature de f ?

2) Montrer que l'écriture complexe de f est $z' = -z + 3\lambda - i\lambda$. En déduire son centre

3) Soit S' la symétrie orthogonal d'axe (AC) montre que S'of est un antidéplacement.

4) Déterminer l'écriture complexe de S et en déduire que l'écriture complexe de S'of est :

$Z' = i\bar{z} + 2\lambda + 2i\lambda$

5) Déterminer l'ensemble des points invariants par S'of puis caractériser la transformation de S'of.

6) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est globalement invariant par S'of

<u>EXERCICE</u> 11

Dans le plan orienté on considère un losange ABCD tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Soit f l'isométrie u plan définie par f(A) = B, f(B) = D et f(D) = C

1) Prouver que f est un antidéplacement

2) Déterminer fof(A) et fof(B).

<u>EXERCICE</u> 12

Dans le plan orienté on considére un carré ABCD tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DC]$ et K le symétrique de I par rapport à

1) On pose $f = S_{(CI)} o S_{\overrightarrow{AB}} o S_{(IJ)}$

a) Caractériser l'application :

b) En déduire que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

2) Soit M un point de la demi-droite $[BA)$.

La perpendiculaire à (CM) en C coupe (IJ) en N. Monter que f(M) = N.

En déduire la nature du triangle CMN

3) On pose $g = T_{\overrightarrow{IK}} o S_{(IC)}$

a) Cararactériser l'application $g o S_{(AJ)}$

b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

4) Soit h une isométrie qui fixe un point de la droite (AB) et transforme (AB) en (IJ).

a) Montrer que h fixe le point I

b) Déterminer tous les isométries de h.

<u>EXERCICE</u> 13

Dans le plan orienté on considère un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Soit les isométries suivantes : $f = S_{(CB)} o S_{(AD)} o S_{(AB)}$ et $g = S_{(CB)} o S_{(AD)}$

1) a) Déterminer la nature des éléments caractéristiques de g.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) Construire le point E = R(A)

b) Quelle est la nature du triangle CAE ?

c) Montrer que les points B, D et E sont alignés.

3) Soit I le milieu de $[EA]$

a) Vérifier que $R = S_{(CI)} o S_{(OA)}$

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h = S_{(CI)} o R o S_{(CI)}$