TS1 : Nombres complexes

Exercice 1

Les trois parties I), II) et III) sont Indépendantes.

Partie I

1) On pose $j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2

En déduire le calcul de : $1 + j + j^2$; j^3 et $\frac{1}{j}$

2) Démontrer que, $\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ on a :

$$2(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

Partie II

1) Déterminer le module et un argument de :

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_2 = -1 + i \quad \text{et} \quad \frac{z_1}{z_2}$$

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3) Comment choisir l'entier naturel n pour que z_1^n soit :

Un réel ? Un imaginaire pure ?

4) Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$: $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$

Partie III

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$

On considère le nombre complexe z , tel que : $z = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta$.

Déterminer le module et un argument de z lorsqu'il existe, en fonction de θ . Déterminer θ pour que z et $1 - z$ aient même module.

Exercice 2

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a) Z^2 - 2Z + 5 = 0 \quad ; \quad b) Z^2 - 2(1 + \sqrt{3})Z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

2) On considère dans le plan complexe (P) de repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$Z_A = 1 + 2i \quad , \quad Z_B = 1 + \sqrt{3} + i \quad , \quad Z_C = 1 + \sqrt{3} - i \quad \text{et} \quad Z_D = 1 - 2i$$

a) Placer A, B, C et D dans le plan (P).

b) Vérifier que $\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}$. En déduire la nature du triangle ABD.

c) Montrer que A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

3) On considère l'équation $(E) : Z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)Z + 5 + 4\cos\theta = 0$

Où θ est un élément de $\mathbb{R}$.

a) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

b) Montrer que les points images des solutions de (E) appartiennent à (C) .

Exercice 3

On considère, dans $\mathbb{C}$, les complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β .

1) Montrer que $\frac{(z_1 - z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est-il nul ?

2) Soit deux points A et B d'un plan complexe d'origine O d'affixes a et b (On supposera O, A et B non alignés).

Calculer en fonction de a et b l'affixe I du barycentre de $\{(A, |b|), (B, |a|)\}$

3) A l'aide du 1), montrer que $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

Exprimer $\arg(z)$ en fonction de $\arg(a)$ et $\arg(b)$. En déduire que $\vec{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Exercice 4

On considère le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. On considère le triangle direct ABC d'angles aigus et de centre de gravité G . On construit les trois segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ tels que :

$$AA' = BC \text{ et } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AA'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$BB' = CA \text{ et } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BB'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$CC' = AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

On note a, b, c, a', b' et c' les affixes respectives de A, B, C, A', B' et C'

1) a) Montrer que $a' = a - ib + ic$

b) En déduire b' et c' en fonction de a, b et c

c) En déduire que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité

2) a) Montrer que : $\frac{c - b'}{c - a'} = i$, en déduire la nature du triangle $A'B'C'$

b) En déduire les deux résultats similaires au résultat précédent.

c) Construire, en le justifiant, le triangle ABC à partir d'un triangle A'B'C' donné d'angles aigus

Exercice 5 : Lieux géométriques

NB : On proposera une approche algébrique et géométrique.

Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

a) $\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$; b) $(z-1-i)(\bar{z}-1+i) = 25$

c) $(z\bar{z})^2 - 13z\bar{z} + 36 \leq 0$; d) $\arg\left(\frac{z-2+i}{z+2i}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

e) $\arg(z^2 - 4) = \arg(z + 2) [2\pi]$

f) Le triangle $MM'M''$ soit rectangle en M avec $M'(z^2)$ et $M''(z^3)$.

Exercice 6

Les trois parties I) et II) sont indépendantes.

Partie : I

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$C_n(\theta) = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta$ et $S_n(\theta) = \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$.

1) Montrer que si $\theta \neq 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), alors :

$$\Sigma_n(\theta) = C_n(\theta) + iS_n(\theta) = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$

2) En déduire que $\Sigma_n(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) e^{i\frac{n\theta}{2}}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Puis les valeurs de $C_n(\theta)$ et $S_n(\theta)$. On prend maintenant $\theta = \frac{\pi}{n}$.

3) Déduire de 2) que $u_n = C_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0$ et que $v_n = S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

Calculer la limite de la suite $\left(\frac{v_n}{n}\right)_{n \geq 1}$

Partie II

En s'inspirant de la première partie,

Calculer $A_n(x) = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$

Exercice 7

Pour tout entier k , on pose : $Z_k = \frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i}$

on note $|z_k| = p_k$ et $\arg z_k = \alpha_k$ où $\alpha_k \in]-\pi, \pi]$.

1) Démontrer que pour tout $k > 0$, $p_k = 1$ et $\tan\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) = \frac{1}{1+k(k+1)}$

2) Placer dans le plan complexe les points d'affixes z_0, z_1, z_2

3) a) Démontrer que pour tout $k \geq 0$, il existe un unique réel θ_k de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tel que $\tan \theta_k = k$. Calculer θ_0 et θ_1

b) Sans calculer θ_2 et θ_3 , Construire sur le cercle trigonométrique les points images de $e^{i\theta_2}$ et $e^{i\theta_3}$ en précisant le procédé de construction

c) Démontrer que pour tout entier $k \geq 0$: $\frac{\alpha_k}{2} = \theta_{k+1} - \theta_k$

4) On pose : $S_1 = z_1$; $S_2 = z_1 z_2$ et pour tout n : $S_n = z_1 z_2 \dots z_n$

a) Quel est le module de S_n ?

b) Exprimer l'argument de S_n en fonction de θ_{n+1} et θ_1

Exercice 8

1) Calculer la somme : $S(z) = 1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2n-2}$, $z \in \mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation définie par : $z^{2n} - 1 = 0$, $n \geq 1$

2) Démontrer que $S(z) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$

3) En considérant $S(i)$, démontrer que : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

En considérant $S(i)$, calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Exercice 9

Soit l'équation (E) dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 2pz - 1 = 0$ où $p = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, z_1 et z_2 les solutions.

$\mathbb{R}, z_1$ et z_2 les solutions.

1) Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble des réels θ tels que :

a) z_1 et z_2 sont des réels

b) z_1 et z_2 sont des imaginaires purs

c) z_1 et z_2 sont égaux

2) Montrer que

a) $\arg(z_1 + 1) + \arg(z_2 + 1) = \theta [2\pi]$

- b) $|z_1 - 1||z_2 - 1| = 2$
 3) On suppose que $\cos\theta > 0$. Montrer que :
 a) $z_1 + 1$ et $z_2 + 1$ ont les mêmes arguments à préciser.
 b) $z_1 - 1$ et $z_2 - 1$ ont le même module à préciser.

Exercice 10

On considère le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, f et F les applications définies par :

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad F : P \setminus \{O\} \rightarrow P \setminus \{O\}$$

$$z \mapsto \frac{\lambda}{\bar{z}} \quad \text{et} \quad m(z) \mapsto M(f(z))$$

- 1) Montrer que f est involutive : c'est-à-dire que $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{C}^*}$ (identité dans $\mathbb{C}^*$).
 2) Déterminer l'ensemble des points invariants par F .
 3) Démontrer que : $M = F(m)$ si et seulement si $\begin{cases} O, m, M \text{ sont alignés} \\ \overline{Om} \cdot \overline{OM} = \lambda \end{cases}$.

Dans la suite on suppose $\lambda = 1$.

4) Soit m un point extérieur au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Une tangente à $\mathcal{C}$ issue de m rencontre $\mathcal{C}$ en T . On note N le projeté orthogonal de T sur (Om) .

a) Montrer en calculant de deux manières $\overline{OT} \cdot \overline{Om}$ que $N = M$.

b) En déduire une construction géométrique de l'image d'un point m du plan n'appartenant pas à $\mathcal{C}$.

5) a) Soit Δ une droite passant par O , privée de O .

Montrer que Δ est globalement invariante par F .

b) Soit d une droite ne passant pas par O d'équation $ax + by = c$.

i) Que peut-on dire du réel c ?

ii) Montrer que si m est sur d alors son affixe z vérifie : $u\bar{z} + \bar{u}z = c$ où u est un nombre complexe à déterminer en fonction de a et b .

iii) Montrer que si m est sur d alors l'affixe z de M vérifie :

$$\left(z - \frac{u}{c}\right) \left(\bar{z} - \frac{\bar{u}}{c}\right) = \frac{u\bar{u}}{c^2}$$

En déduire que l'image de d est un cercle que l'on définira.

Exercice 11

1) α est un nombre réel. Résoudre l'équation :

$$S_{(\alpha,1)} : \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation :

$$S_{(\alpha,n)} : \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^{2n} - 2z^n \cos \alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

dans laquelle n est un entier naturel non nul donné.

2) Pour tout entier naturel n , pour réel α et pour tout complexe z , on pose :

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n \cos \alpha + 1$$

a) Justifier que, pour tout z, α et n , on a :

$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[z^2 - 2z \cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + 1 \right]$$

b) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que : $\prod_{k=0}^{n-1} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{n} \right) = \frac{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{n} \right)}{4^{n-1}}$.

3) Pour tout $\alpha \in]0 ; \pi[$ et pour tout naturel $n \geq 2$, on pose :

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} \right)$$

a) Montrer que, pour $\alpha \in]0 ; \pi[$ et on a : $2^{n-1} H_n(\alpha) = \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2n} \right)}$.

b) Quelle est la limite de $\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_n(\alpha)$

c) Déduire que pour tout naturel $n \geq 2$ on a : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}$