LANS/TS1 : ARITHMETIQUE

Exercice 1

1) *La division euclidienne de 900 par un entier b donne 14 et pour reste r. Quels sont les valeurs possibles de b et r ?*
2) *Déterminer les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.*
3) *Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b.*
   Sachant que $a + b + r = 3025$ et $q = 50$, rétablir la division.
4) *On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur en mètre d'un rectangle.*
   Sachant que $a = 72$ et que le plus petit multiple commun à a et b est 216, quelles sont les valeurs possibles de b ?
5) *Trouver les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240.*
   Déterminer les entiers naturels n tels que $n^2 - 240$ soit un carré parfait.

Exercice 2

Démontrer en utilisant une congruence que, pour tout entier naturel n on a :

a) $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ *est divisible par 11*
b) $4^n + 15n - 1$ *est divisible par 9*
c) $n^7 - n$ *est divisible par 7*
d) $n(n^4 - 1)$ *est divisible par 5*

Exercice 3

1) *Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :*

$a)\ 14x + 21y = 7$; $b)\ 5p + 3q = -7$; $c)\ 4u - 8v = 3$

$d)\ 11 - 7v = -4$; $e)\ 34p - 15q = 2$; $f)\ 10x + 9y = -100$

$g)\ 11x - 26y = 1$; $h)\ -28x + 17y = 45$; $i)\ 24x - 31y = -35$

2) *Reprendre les résolutions avec des congruences.*

Exercice 4

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$a = n^3 - n^2 - 12n$ *et* $b = 2n^2 - 7n - 4$

1) *Montrer que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.*
2) *On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le pgcd de α et β.*
   a) *Établir une relation entre α et β indépendante de n.*
   b) *Démontrer que d est un diviseur de 5.*
   c) *Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.*
3) *Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.*
4) a) *Démontrer que si deux entiers naturels x et z sont premiers entre eux alors $pgcd(x, yz) = pgcd(x, y)$*

   b) *Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n, le pgcd de a et b.*

c) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ *et* $n = 12$.

Exercice 5

N et M sont deux nombres tels que : N s'écrit $\overline{1a3a}^4$ *et M s'écrit* $\overline{bca35}^4$.

1) *Résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation :* $7x + y = 46$
2) *Sachant que N est divisible par 11 et que le couple* $(b\,;c)$ *est solution de l'équation* $7x + y = 46$*, donner les écritures en base 4 de N et en base 7 de M.*
3) *Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division de* 2^n *par 5.*
4) *Déterminer l'ensemble des entiers n tel que* $M^n = 3\ [5]$
5) *Ecrire dans le système décimal M et N.*
6) *Résoudre dans* $\mathbb{N}^2$ *le système d'inconnues x et y :*

$$\begin{cases} ppcm(x\,;y) = M - N \\ pgcd(x\,;y) = 5N + 14 \end{cases}$$

Exercice 6

Partie A

1) *Soit n un entier naturel*
   a) *Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division par 7 de l'entier* 3^n
   b) *En déduire le reste de la division par 7 de l'entier* 506390^{128}
   c) *Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel* 7^{2024} *écrit dans le système décimal ?*
   d) *Dans le système de numération décimal, on considère l'entier naturel* $\overline{651x}$
   Déterminer x pour que $506390^{128} + \overline{651x}$ *soit divisible par 7*
2) a) *Déterminer le plus grand commun diviseur des nombres 21590 et 9525.*
   b) *Déterminer l'ensemble des entiers x tels que :* $34x = 2\ [15]$
   c) *Résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation :* $21590x + y9525 = 1270$

Partie B

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ *dans le système de numération de base 7*

1) *déterminer x pour que :*
   a) *A soit divisible par 6*
   b) *A soit divisible par 5*
   c) *En déduire qu'il existe x tels que A soit divisible par 30*
2) *On donne à x la valeur 0, déterminer l'écriture décimale de A. Dans ce cas quel est le nombre de diviseurs positif de A ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec 3 ?*

Exercice 7

Deux nombres premiers n et m sont dits "jumeaux" si $n + 2 = m$*. Par exemple, les couples (11 , 13) , (17 , 19) , (41 , 43) sont des couples de nombres premiers jumeaux. On considère un entier n > 3.*

1) *Montrez que si* $(n\,, n + 2)$ *est un couple de nombres premiers jumeaux alors n doit être congru à 2 modulo 3, autrement dit, on doit avoir,* $n = 2\ [3]$.

2) *Montrez que si $(n, n+2)$ est un couple de nombres premiers jumeaux alors $n+4$ ne peut pas être premier.*
3) *Montrez que $(n, n+2)$ est un couple de nombres premiers jumeaux si et seulement si n^2+2n a exactement 4 diviseurs dans N*

Exercice 8

Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = 3 \quad , \quad y_0 = 1 \\ \forall n \in IN \; , \; x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in IN \; , \; y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$.

1) *Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées $(x_n ; y_n)$ sont sur la droite d'équation $2x - y - 5 = 0$*
2) *En déduire x_{n+1} en fonction de x_n.*
3) *Démontrer que (x_n) et (y_n) sont des suites entiers relatifs.*
4) *Soit n un entier naturel. Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.*
5) *Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premier entre eux.*
6) a) *Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN, x_n = 2^{n+1} + 1$.*
   b) *Soit n un entier naturel. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}.*
   c) *En déduire les valeurs n pour lesquelles x_n et y_n son divisibles par 5.*

Exercice 9

1) *Soit k un entier naturel. Justifiez les congruences :*

$3^{2k} + 1 \equiv 2 \;\; [8]$ *et* $3^{2k+1} \equiv 4 \;\; [8]$.

2) *On considère l'équation (E), à inconnues n et m entier naturels :* $2^m - 3^n = 1$
   a) *Montrer qu'il n'y a pas de solution telle que n soit paire (utiliser 1°)*
   b) *Démontrer de même que la seule solution de (E) est le couple (2 ; 1).*

Exercice 10

1) *Justifier que 7 divise les nombres* $2^6 - 1$; $3^6 - 1$; $4^6 - 1$ *et* $5^6 - 1$.
2) *Soit n un entier naturel, et A_n défini par :* $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$.

Montrer que $A_{n+6} - A_n$ est divisible par 7.

3) *Soit n un entier naturel, d et r son quotient et son reste dans la division euclidienne par 6. Montrer que* A_n *et* A_r *ont même reste dans la division euclidienne par 7.*
4) *Déterminer les valeurs de n pour* A_n *est divisible par 7.*
5) *Soit* $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$.
   a) *Montrer que* $A_n \equiv B_n \quad [7]$.
   b) *Déduisez-en les valeurs de n pour lesquelles* B_n *est divisible par 7.*

Exercice 11

1) *On considère l'équation* $(G) : 27x - 31y = 1 \;;\; (x, y) \in \mathbb{Z}^2$. *Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation* (G) *est :* $\{(31k - 8 \,; 27k - 7) \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$
2) *On définit explicitement l'ensemble* $E = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 30\}$
   Déterminer le seul élément a de E qui vérifie $27a = 1 \;\; [31]$
3) *Soit r(n) le reste de la division euclidienne de 27n+4 par 31.*
   Soit f l'application définie ainsi : $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ n & \mapsto & r(n) \end{array}$
   a) *Montrer que l'application f est injective de E vers E.*
   b) *Montrer que l'application f est surjective de E vers E*
   c) *Montrer que est bijective de E vers E et expliciter* f^{-1}

Exercice 12

1) *On considère l'équation* $(E) : 109x - 226y = 1 \;;\; (x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
   a) *Déterminer le pgcd(109 , 226). En déduire que (E) est solvable.*
   b) *Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation* (E) *est :*
      $\{(141 + 226k \,; 68 + 109k) \;;\; k \in \mathbb{Z}\}$
   c) *En déduire l'existence d'un couple* $(e, d) \in \mathbb{N}^{2*}$ *tels que :*
      $109d = 1 + 226e \quad ; \quad d \leq 226$
2) *Montrer que le nombre 227 est un nombre premier.*
3) *Soit* $A = [\![0, 226]\!] = \{0, 1, 2, \cdots, 226\}$
   On considère les deux applications :
   $f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a & \mapsto & f(a) \end{array} \qquad et \qquad g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ n & \mapsto & g(a) \end{array}$
   - $f(a)$ *est le reste de la division euclidienne de* a^{109} *par 227.*
   - $g(a)$ *est le reste de la division euclidienne de* a^{141} *par 227.*

   a) *Montrer que* $gof(0) = 0$
   b) *Montrer que :* $\forall\, a \in A \quad ; \quad a^{226} = 1 \,[227]$
   c) *Montrer que :* $\forall\, a \in A \quad ; \quad gof(a) = fog(a) = a$.
   d) *Que peut-on en déduire pour les fonctions f et g ?*