

TS2 : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

EXERCICE 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\ln(x+3) + \ln(x+5) = \ln 15, \ln(x+2) = \ln\left(\frac{-x-11}{x+3}\right)$$

$$\ln(x-1) = \ln(x^2-4), \ln(x+3)(x+5) = \ln 15,$$

$$\ln(x-1) = \ln(2-x), \ln|x-1| = \ln|2x-1|$$

$$\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11), \ln x^2 + \ln x - 6 = 0$$

$$(5\ln x + 5)\ln x = 0; \ln|x-1| = \ln(2x-1)$$

$$\ln(x+2) = \ln(-x+11) - \ln(x+3), \ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right) = 2$$

$$2\ln(x+1) + \ln(x-1) = 3\ln, \ln^2 x + 5\ln x = 0$$

$$\ln(x^2+5x+6) = \ln(x+11), \ln^2 x + 4\ln x - 3 = 0$$

$$\ln\sqrt{2x-2} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x, (\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\ln(x+5x) \leq \ln(x+6), \ln x^2 \leq 1, \ln^2 x - 3\ln x + 2 < 0$$

$$1 + \ln(x+3) \geq \ln x, \ln(2x^2-3x-5) < 2\ln 2,$$

$$\ln(2x^2-3x-5) - \ln(x^2-1) > 0, (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \leq 0$$

$$\ln(x+1) < -5; \ln(5-4x) - \ln(x+2) > \ln\left(\frac{1}{2x+1}\right)$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations :

a- $2\ln x - \ln(2x-2) + \ln(x+2) = 3\ln 2$

b- $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$

c- $\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln|4-x|$

d- $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 8\ln x + 4 = 0$

e- $\ln x + \ln(x+2) < \ln(x^2-2x+2)$

f- $2\ln(2x-1) - \ln 2 - \ln(5-2x) \leq 0,$

EXERCICE 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x+y=8 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 3 \end{cases}; \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+4y=12 \\ \ln(x-1) + \ln y = \ln \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} 2\ln x - \ln y = 5 \\ \ln x + 5\ln y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = -1 \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 5 \end{cases}; \begin{cases} x+y=7 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 3 \end{cases}$$

2. On considère le polynôme suivant:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 2$$

a- Déterminer une racine évidente de P puis factoriser le polynôme P

b- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $P(x) = 0$ puis $P(x) < 0$

c- En déduire la résolution de :

$$2\ln^3\left(\frac{x}{x-2}\right) - 3\ln^2\left(\frac{x}{x-2}\right) - 3\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + 2 = 0$$

$$2\ln^3\left(\frac{x}{x-2}\right) - 3\ln^2\left(\frac{x}{x-2}\right) - 3\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + 2 < 0$$

3. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer le domaine de définition :

$$f(x) = 2x - 4\ln x; \quad g(x) = 2x\ln x - \frac{2x}{x+1}$$

$$h(x) = \ln\left(\frac{x+4}{1-x}\right); \quad k(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$p(x) = \ln\left(\frac{1-\sin x}{2+\cos x}\right); \quad q(x) = x + 4 - \ln(\tan x)$$

EXERCICE 3 :

1. Calculer la limite de la fonction f en x_0

$$f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x}, x_0 = 0; f(x) = x(\ln x)^2, x_0 = 0$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}, x_0 = +\infty; f(x) = (\sin x)\ln x; x_0 = 0$$

$$f(x) = \frac{(\ln x)^{10}}{\sqrt{x}}, x_0 = +\infty; f(x) = x + \ln(x^2+1), x_0 = -\infty$$

$$f(x) = (x-2)\ln\left(\frac{x+1}{x^2-4x+4}\right), x_0 = 2; f(x) = \frac{\ln(1+\cos x)}{x}, x_0 = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1), x_0 = 0, \text{ puis } x_0 = +\infty$$

$$f(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{x}, x_0 = 0; f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}, x_0 = +\infty$$

2. Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sqrt{x}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\sin x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x^2); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+3)}{\ln x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1}{x}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - (\ln x)^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1-x^2}{\cos x}\right) \right); \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1-x^2}{\cos x}\right); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}; \lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} \ln x; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{x} + x - 1 \right); \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3} \ln\left(\frac{x}{3}\right); \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2)}{x^2-3x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 3x}{2\ln x + x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+3}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2}{x \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2-3x+7)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^5-x^3)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - (\ln x)^5$$

EXERCICE 4 :

1. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes :

$$h(x) = \ln(x^2-x-2); \quad f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right);$$

$$g(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}); k(x) = (x^2+x)\ln(x+1);$$

$$p(x) = \frac{1+(\ln x)^2}{1-(\ln x)^2}; m(x) = \ln(1-2\cos x); n(x) = x \ln|x|$$

$$t(x) = |x-1| - 2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right); r(x) = \frac{x+\ln x}{x^2}; s(x) = \frac{x}{\ln x};$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln x - x^2 \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}; \begin{cases} f(x) = x \ln|x| \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

2. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{6x-1}{3x^2-x+5}; g(x) = \frac{1}{x \ln x}; f(x) = \tan x; d(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$k(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}; p(x) = \frac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}; q(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$s(x) = x + \frac{1}{x+1}; l(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+5}; u(x) = \frac{2x+3}{x^2-1}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
- $$\log_3(2x - 5) = 0; \log_2(2x + 1) = \log_2(x + 2);$$
- $$\log_3(2x + 1) = \log_2(5 - x); \log_2(x + 4) = \log_3$$
- $$2\log_5^2(x - 2) + 3\log_5(x - 2) + 1 = 0; \log^2(x + 1) = 5;$$
- $$\log^3(x + 2) + 3\log^2(x + 2) - 5\log(x + 2) + 1 = 0$$
4. Dans chaque cas, dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \log\left(\frac{3x - 2}{x + 4}\right); h(x) = \log_3(x + 1);$$

$$g(x) = \frac{\log_2(x+1)}{\ln x}; p(x) = \log_2(x^2 + 3x + 2)$$

PROBLEME 1 :

- A. Soit g la fonction définie par $g(x) = -x^2 + 1 + \ln x$.
- Etudier les variations de g .
 - Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x (calculer $g(1)$).
- B. Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{\ln x}{2x}$.
- Etudier les variations de f .
 - On désigne par (Δ) la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ et par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$.
- a- Donner suivant les valeurs de x le signe de $h(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)$ et en déduire la position de (C) par rapport à (Δ) .
- b- Démontrer que la droite (Δ) est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
- c- Construire la courbe (C) et la droite (Δ) .

PROBLEME 2 :

- A. On considère la fonction u de $[0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $u(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}$
- Déterminer l'ensemble de définition de u ; calculer $u(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.
 - Etudier les variations de u . Dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).
 - Déduire des résultats précédents que :
 - $\forall x \in [0; 1[, u(x) \geq 0$
 - $\forall x \in]1; +\infty[, u(x) < 0 [\forall x \in [0; 1[$,
- B. Soit $g: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :
- $$g(x) = x \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 1.$$
- Déterminer le domaine de définition D_g de g ; puis étudier la limite de g en 1.
 - Vérifier que : $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$.
 - Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = 1$.
 - En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

Interpréter géométriquement ce résultat.

- Dresser le tableau de variations de g .
- Montrer qu'il existe un réel α unique appartenant à $]0; 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement d'ordre 1 de α .
- Tracer la courbe (C_g) de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2cm).

C. Soit $f: [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par : $f(x) = (x^2 - 1) \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)$.

- Montrer que f est dérivable sur $[0; 1[$ et que $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [0; 1[$.
- Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_g) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

PROBLEME 3 :

A. Soit g la fonction définie :

$$g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

- Démontrer que $\forall x \geq -\frac{1}{2}$, on a $g'(x) = -\frac{x^3}{1+x}$
- En déduire que $\forall x \geq -\frac{1}{2}$, on a $|g'(x)| \leq 2|x^3|$
- En appliquant les inégalités des accroissements finis à g déduire de ce qui précède que :
 $\forall x \geq -\frac{1}{2}$ on a : $|g(x)| \leq 2x^4$

B. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{2} \\ f(x) = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \quad \forall x \neq 0 \end{cases} \text{ et on note } (C)$$

sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$

- Démontrer que f est dérivable en 0
- Préciser une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse.
- Soit h la fonction définie par :
$$h(x) = -\frac{x^2+2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$$
 - Etudier les variations de la fonction h
 - Calculer $h(0)$. En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x
 - Calculer $f'(x)$ et trouver une relation entre $f'(x)$ et la fonction $h(x)$
 - En déduire les variations de f
 - Etudier les limites aux bornes de D_f puis déterminer les branches infinies à (C)
- Construire la courbe (C) (unité graphique 2cm)
- Calculer la dérivée de la fonction $x \ln x$ et en déduire la primitive de f qui s'annule en 1

PROBLEME 4 :

PARTIE A :

Soit h la fonction définie par : $h(x) = \ln|x| + x + 1$

1. Etudier les variations de h puis dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α qui vérifie $0,27 < \alpha < 0,28$.
3. En déduire le signe de $h(x)$.

PARTIE B :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x^2 - 3x + 2|} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{x \ln|x|}{x+1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Justifier que $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ et déterminer les limites aux bornes puis interpréter les résultats obtenus.
2. Ecrire f sans le symbole de valeur absolue pour les valeurs de $x \geq 1$.
3. Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique D en $+\infty$.
Etudier la branche infinie en $-\infty$
4. Etudier la continuité de f en 1.
5. Etudier la dérivabilité de f en 1 et en 2. Interpréter graphiquement ces résultats.
6. Calculer $f'(x)$ sur $] -\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[$ et montrer que $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$.
7. Calculer $f'(x)$ dans chacun des autres intervalles où f est dérivable.
8. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ et dresser le tableau de variations de f .
9. Construire la courbe de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.
10. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2; +\infty[$.
 - a- Montrer que g est une bijection de $[2; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
 - b- On note g^{-1} la bijection réciproque de g . Justifier que g^{-1} est dérivable sur J et dresser son tableau de variations.
 - c- Construire la courbe de g^{-1} dans le repère.
 - d- Calculer $g(3)$ et en déduire $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.
 - e- Expliciter $g^{-1}(x)$ puis retrouver le résultat du d).

PROBLEME 5 :

- A. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$.
1. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
 2. Déterminer la dérivée de f , étudier son signe et dresser le tableau de variation de f .
 3. Montrer que $f(x) = 1$ admet une solution et une seule α dans $\mathbb{R}$. En déduire que $3 < \alpha < 4$.
- B. Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{3(\ln|x| - 1)^3}{3\ln^2|x| + 1}$.

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Démontrer que g est la composée de la fonction f et d'une fonction h à préciser.
3. Etudier la parité de g .
4. On note $D_E =]0; +\infty[$.
Soit k la restriction de g à D_E .
 - a- Calculer les limites de k aux bornes de D_E .
 - b- Etudier ses branches infinies.
 - c- En utilisant les questions précédentes, calculer $k'(x)$ et étudier les variations de k sur D_E .
Dresser le tableau de variation de k .
Déterminer le point d'intersection de la courbe de k avec l'axe des abscisses et donner le signe de k .
 - d- Montrer que k réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
 - e- Construire les courbes C_k et $C_{k^{-1}}$, $C_{k^{-1}}$ est la courbe de la bijection réciproque k^{-1} de k , sur le même repère précédent.
 - f- Tracer la courbe de g dans le repère précédent.

PROBLEME 6 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)[1 - \ln(1-x)], & \text{si } x < 1 \\ x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2cm.

1. Préciser D_f ensemble de définition de f .
2. Etudier la continuité de f sur D_f .
3. Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter géométriquement ce résultat.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
5. Calculer la dérivée de f sur chaque intervalle où f est dérivable puis étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f .
6. Montrer que la droite $(D) : y = 2x - 1$ est une asymptote à la courbe de f lorsque x tend vers $+\infty$.
7. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation de ce résultat.
8. Soit x_0 l'abscisse du point d'intersection A de (C_f) avec l'axe des abscisses ($x_0 \neq 0$). Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) en A .
9. Tracer (T) et (C_f) dans le repère.
10. Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$.
 - a- Montrer que g définit une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
 - b- Expliciter g^{-1} puis représenter graphiquement g^{-1} dans le même repère que f .