Matière : Mathématique	**Similitudes Planes Directes**	**Professeur** : M. KEBE
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Classe** : TS2

Exercice 1 :

Dans le plan complexe soit f la similitude qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 - i)z + 2i$.

1°) Déterminer le rapport, l'angle et le centre f.

2°) soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$,les formes algébriques des nombres complexe z et z'. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

3°) Quelle est l'image par f de la droite d'équation $x + 2y - 1 = 0$?

4°) Quelle est l'image par f du cercle (C) de centre le point d'affixe i et de rayon $\sqrt{2}$?

Exercice 2 :

Dans plan complexe, soit f la transformation qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$.

1°) démontrer que f admet un unique point invariable I ; déterminer l'affixe de I. Caractériser géométriquement f.

2°) Soit G le barycentre des points I, M, M' affectés respectivement les cœfficients 3, 2, 1. Calculer les coordonnées de G en fonction de celles de M.

3°) On suppose que le point M décrit la droite d'équation : $y = x$.
Quel l'ensemble décrit par le point G?

Exercice 3 :

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$on considère les points A et B d'affixes respectives $1 + 3i$ et $2i$.

1°) Soit S la similitude plane directe de centre B qui transforme O en A. On note z' l'affixe du point M' transformé par S du point M d'affixe z.

a) Calculer le module et un argument du nombre complexe affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Calculer l'angle et le rapport de la similitude S.

c) Exprimer z' en fonction de z.

2°) Soit T la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M'' d'affixe z'' = iz + 3. Donner la nature de T en précisant ses éléments caractéristiques. On note Ω le point invariant par la transformation T.

3°) Montrer que les points A, Ω, B sont les sommets d'un triangle isocèle

Exercice 4 :

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

tel que $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$.

1) Déterminer l'écriture complexe de f.

2) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

Exercice 5 :

1) On considère l'équation (E) $z^3 + (-6-4i)z^2 + (12+21i)z - 9 - 45i = 0$

a) Déterminer une solution imaginaire pure z_0 de (E).

b) Achever le résolution de l'équation (E)

2) Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On considère les points A, B et C d'affixes respectives $3i$, $3+3i$ et $3-2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature de ABC.

3) Soit f la similitude directe qui laisse invariant B et qui transforme A en C.

a) Donner une écriture complexe de f.

b) Donner les éléments caractéristiques de la fonction f

Exercice 6 :

Soit S la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \left(i - \sqrt{3}\right)z + 3 + \sqrt{3} + i\left(2\sqrt{3} + 1\right)$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

2) Déterminer l'expression analytique de S.

3) Déterminer l'image par S de la droite passant le point $A\left(1 - 2\sqrt{3}; 0\right)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\left(\sqrt{3}; 1\right)$

Exercice 7 :

On considère les nombres complexes $a = -\sqrt{3} + i$, $b = 3 + 2i$ et $c = 7 - 2i$.

1. **a)** Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a .En déduire les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

b) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre réel

c) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est imaginaire pur .

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $|z - b| = |z - c|$

b) $2\,|z-b| = |a|$

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1+i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

   a. Démontrer que f admet un seul point invariant Ω .

   b. Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre Ω . Préciser l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie.

Exercice 8 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l equation $z^3 = 1$

2)Développer $(2-2i)^3$

3)Soit l'équation (E): $z^3 = -16-16i$

4)En posant $u = \frac{z}{2-2i}$, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les solutions de (E). En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

5)Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_B = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_C = -\frac{1}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la similitude S qui transforme B en C et laisse invariant le point A.Préciser son rapport et son angle.

b.Soient $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la similitude S.
Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z'| = 2$

Exercice 9 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1cm)

1) On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5i.

a- Déterminer l'écriture complexe de la similitude s qui transforme O en A et B et O.

b- Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.

c- Déterminer le point $s \circ s(B)$; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.

2) On note (D) la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A' et B' les points d'affixes respectives 8+4i et 2+i.

a- Démontrer que les points A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et Bsur la droite (D).

b- Vérifier que $s(B') = A'$.

c- En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

Le BAC, j'ai confiance !