TS2 : LES NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1 :

1. Mettre sous forme algébrique les complexes:

$(5-i)^2$; $(2+3i)^2$; $(1-i\sqrt{5})^2$; $(5-4i)(3+6i)$

$\frac{-1+i\sqrt{3}}{3-i}$; $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$;$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{3-i}{1-3i}\right)\left(\frac{1+2i}{2+i}\right)$

$\frac{1}{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$; $\frac{(-1-2i)^3}{(1+i)^4}$; $\left(\frac{3-i}{1-2i}\right)^2$; $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-1-i$

2. Donner le conjugué de chacun des complexes :

$z=3-2i$; $z=5+i$; $z=2i$; $z=\sqrt{2}$; $z=\frac{1}{2+i}$

$z=\frac{(3-2i)(5+i)}{3i(7+2i)}$; $z=\left(\frac{i-3}{1+i}\right)^2$; $z=(2-i)(3+2i)$

3. Déterminer un module de chacun des complexes :

$(1+i)^4$; $(2-3i)^2$; $(-2+i)(1-3i)$; $\frac{1-5i}{i+2\sqrt{3}}$

4. Mettre sous forme trigonométrique :

$z=1+i\sqrt{3}$; $z=-1+i\sqrt{3}$;$z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $z=1-i\sqrt{3}$; $z=\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$; $z=\frac{i}{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}$; $z=\frac{-\sqrt{2}}{1+i}$; $z=\frac{3}{1-i}$;$z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$; $z=3i+\sqrt{3}$; $z=2{,}5$; $z=-8i$; $z=\frac{3(1+i\sqrt{3})}{(1+i)^2}$; $z=\frac{1+i}{1-i}$; $z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^3$; $(1-i)^5(1+i)^3$; $z=sin\theta+icos\theta$; $z=1+itan\theta$; $z=\frac{cos\theta+isin\theta}{cos\theta-sin\theta}$; avec θ un réel fixé.

EXERCICE 2 :

1. Donner la forme exponentielle des complexes :

$z=2\sqrt{3}-2i$; $z=-5-5i$; $z=-1+i\sqrt{3}$; $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$;

$$z=cos\frac{\pi}{5}+isin\frac{\pi}{5}; z=2\left(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right); z=i$$

2. Mettre sous forme algébrique les complexes :

$a=e^{i\pi}$; $b=e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $c=e^{2i\frac{\pi}{3}}$; $d=\frac{e^{i\pi}}{4}$; $e=2ie^{i\frac{\pi}{6}}$;

$$f=5\left(cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}\right); g=2i\left(cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4}\right)$$

3. Soit $z_1=1+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$

a- Déterminer $|z_1|$, $|z_2|$, $arg(z_1)$ et $arg(z_2)$

b- Donner la forme algébrique de z_1z_2

c- Donner la forme trigonométrique de z_1z_2

d- En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

4. Soit le nombre complexe $z_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

a- Donner la forme exponentielle de z_3

b- En déduire la forme algébrique de z_3^6

5. Soit un réel $\theta\in]0;\pi[$

a- Montrer que $1+e^{i\theta}=2e^{i\frac{\theta}{2}}cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

b- Montrer que $1-e^{i\theta}=-2ie^{i\frac{\theta}{2}}sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

c- En déduire un module et un argument de chacun des complexes : $1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$

EXERCICE 3 :

Le plan est muni d'un repère complexe $(O,\vec{u},\vec{v})$

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $2+i, -1$ et $3-2i$

a- Déterminer l'affixe du point I milieu de $[BC]$

b- Calculer AB, AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC

c- Déterminer l'affixe du point D symétrique de A par rapport au point I

d- Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

e- Déterminer l'affixe du point G isobarycentre des points A, B, C

f- Déterminer l'affixe du point F barycentre du système $\{(D,2);(A,-1),(C,3)\}$

2. Soit les points P, Q, R et S d'affixes respectives $-2+i$, $4i$, $\frac{7}{2}+2i$ et $\frac{3}{2}-i$

a- Placer ces points dans le repère complexe.

b- Quelle est la nature exacte du quadrilatère $PARS$?

3. Soit les points M, N et T d'affixes $z_M=i$, $z_N=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ et $z_T=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

a- Placer M, N et T dans le repère.

b- Montrer que ces points appartiennent au cercle trigonométrique.

EXERCICE 4 :

1. On considère le complexe $z=x+iy$ où x et y sont des réel. Soit le complexe $z'=z^2$

a- Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'

b- Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(z)$ pour que z' soit réelle.

c- Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ pour que z' soit imaginaire pure.

2. Soit P le point du plan d'affixe z

a- Déterminer et construire l'ensemble des points P tels que : $|\bar{z}-1+2i|=3$

b- Déterminer et construire l'ensemble des points P du plan tels que : $\frac{|iz+1-i|}{|\bar{z}+2+i|}=1$

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer et construire l'ensemble des points d'affixe z vérifiant la condition donnée :

$z=2e^{i\theta}, \theta\in[0;\pi]$, $z=-2e^{i\theta}$, $\theta\in[0;\pi]$

$z=2+cos\theta+isin\theta$, $\theta\in[0;2\pi[$

4. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note A le point d'affixe $4+2i$, B le point d'affixe $-2-i$ et M le point d'affixe z.

Soit le nombre complexe $Z=\frac{z-4-2i}{z+2+i}$.

a- Donner une signification géométrique de $|Z|$ et de $arg\ Z$.

b- Préciser la nature puis construire :

- l'ensemble des points M d'affixe z, tels que $|Z| = 1$.
- l'ensemble des points M d'affixe z, tels que $|Z| = 2$.
- l'ensemble des points M d'affixe z, tels que Z est un réel positif.
- l'ensemble des points M d'affixe z, tels que Z est un imaginaire pur.

EXERCICE 5 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$z^2 + z + 2 = 0$; $z^2 - 2iz - 1 = 0$; $z^2 + 5 = 0$;
$z^2 - (4 + 2i)z + 2 + 4i = 0$; $(2 + i)z^2 + (1 - 7i)z - 5 = 0$

2. On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E): z^2 + (1 + i)z + i = 0$

a- Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$

b- En déduire la résolution des équations :

$iz^2 + (1 - i)z - 1 = 0$; $z^4 + (1 + i)z^2 + i = 0$

3. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(F): z^2 - (3 + i)z + 2(1 + i) = 0$

a- Résoudre (F) dans $\mathbb{C}$ puis donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique

b- En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$x^4 - (3 + i)x^2 + 2(1 + i) = 0$

4. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$(E'): z^4 + az^2 + b + 12i = 0$ où a et b sont deux nombres réels

a- Déterminer les réels a et b sachant que $\sqrt{2}(1 + i)$ est une solution de (E')

b- En déduire la résolution de l'équation (E')

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$z^4 + 6z^2 + 25 = 0$; $z^4 + 4z^2 - 77 = 0$; $z^5 = \bar{z}$

EXERCICE 6 :

1. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E): z^3 - (3 + 4i)z^2 - 4(1 - 3i) + 12 = 0$

a- Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle dont on déterminera

b- En déduire une résolution de (E) dans $\mathbb{C}$

2. Soit dans $\mathbb{C}$ le polynôme :

$P(z) = z^3 + (9i - 14)z^2 + (1 - 60i)z + 46 + 9i$

a- Montrer que P admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b- En déduire une résolution de $P(z) = 0$

c- Mettre les solutions de cette équation sous forme trigonométrique puis exponentielle.

3. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(F) : z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$

a- Montrer que 0 n'est pas solution de (F).

b- Montrer que cette équation équivaut au système d'équations $\begin{cases} u^2 - 5u + 4 = 0 \\ u = z + \frac{1}{z} \end{cases}$

c- Résoudre l'équation $u^2 - 5u + 4 = 0$

d- En déduire les solutions de (F).

EXERCICE 7 :

1. Déterminer les racines cubiques de $4\sqrt{2}(1 + i)$
2. Déterminer les racines quatrièmes de $8\sqrt{2}(-1 - i)$
3. Déterminer les racines cinquièmes de $32i$
4. Résoudre les équations suivantes :

$z^2 = 2i$; $z^2 = -5 + 12i$; $z^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $(1 - iz)^2 = -1$

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 1$
6. En déduire la résolution de $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$
7. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

a- Mettre sous forme trigonométriques les solutions de l'équation (E)

b- En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de (E) sous forme algébrique

c- En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

8. On considère la fonction polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$

a- Comparer $P(\bar{z}) et\ \overline{P(z)}$, $\bar{z}$ étant le conjugué de z et $\overline{P(z)}$ le conjugué de $P(z)$. Calculer $P(i)$.

b- En déduire une puis deux solutions de l'équation $P(z) = 0$.

c- Factoriser P puis résoudre $P(z) = 0$.

d- Calculer la somme et le produit des solutions

EXERCICE 8 :

Pour nombre complexe z non nul on pose : $w = z + \frac{4}{z}$. Soit θ un nombre réel

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z + \frac{4}{z} = 4cos\theta$
2. Ecrire les solutions sous forme exponentielle
3. A tout complexe z, on associe le point $M(z)$. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(z)$ tel que w soit réel.
4. Soit A, B, C les points d'affixes respectives $2e^{i\theta}$, $4cos\theta$ et $2e^{-i\theta}$, où θ est un réel de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

a- Placer, pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, les points A, B, C

b- Vérifier que pour $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, les points A, B et C appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}$.

c- Montrer que si $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $OABC$ est un losange.

d- Pour quelle valeur de θ le quadrilatère $OABC$ est – il un carré ?