TS2 : COMPLEMENT D'ANALYSE

EXERCICE 1 :

1. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{-x^2+5x-4}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}\ -\ 3}{x^2-4}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+2x}$; $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+4x^2+2x-3}{x^2+5x-6}$; $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{6x^2+1}-5}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8-x^3}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-2x+3+\sqrt{3}}{-x+\sqrt{3}}$

2. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x+2)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-x+3)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x-2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+4x\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x^3+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-1}$

3. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx-tanx}{x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2sin\left(\frac{1}{x}\right)}{sinx}$; $\lim\limits_{x\to 1} tan\left[\left(\frac{x+1}{6x}\right)\frac{\pi}{2}\right]$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{12sinx-6}{4x-\pi}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{sin\pi x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tanx-1}{4x-\pi}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x}{tan^2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+x}{cosx-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{sin2x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{\sin(\pi x)}{x-1}\right]^2$

EXERCICE 2 :

1. Calculer les limites en discutant suivant la valeur du paramètre m.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-tanx}{\cos(2x)}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2cosx-1}{4sin^2x-3}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{2}{sin2x}-\frac{1}{tanx}\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(cos\frac{\pi}{2}-sin\frac{\pi}{2}\right)tanx$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tanx-1)\left(1-tan\frac{x}{2}\right)$

$\lim\limits_{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos(2x)-1}{\cos(3x)}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sin2x-1}{cos2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2cosx-\sqrt{3}}{6x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+sinx}{2-sinx}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x)sinx}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2cosx-1}{6x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{tan6x}{1-2sinx}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2cosx}{sin3x}$

2. Sachant que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$

a- On considère la fonction $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x^2}$;

Démontrer que $f(x)=\frac{2sin^2x}{x^2}$

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b- Déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=2$.

c- Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{sin^2 2x}$

3. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

4. En déduire les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-cosx}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x}{cosx-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-cosx}}{sinx}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xsinx}{1-cosx}$

EXERCICE 3 :

1. Démontrer que pour tout $x\epsilon\ [1;+\infty[$, $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

2. On considère la fonction définie sur $[2\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{3x+sinx}{x-1}$. Montrer que, pour tout $x\geq 2$, $|f(x)-3|\leq\frac{4}{x-1}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Soit f la fonction définie : $h(x)=3x+2sinx$

a- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$3x-2\leq h(x)\leq 3x+2$

b- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$

4. soit la fonction l définie sur $\mathbb{R}$ par : $l(x)=\frac{1}{2-cosx}$

a- Montrer que pour tout x réelle, $\frac{1}{3}\leq l(x)\leq 1$

b- En déduire les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2-cosx}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2-cosx}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+cosx}{2-cosx}$

EXERCICE 4 :

A. On considère la fonction définie par :

$f(x)=x^2six\frac{1}{x}\ si\ x\neq 0\ et\ f(0)=0$

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. f est –elle continue sur IR ?
3. Soit la fonction définie par :

$g(x)=\frac{\sqrt{2x-2}-2}{2x-6}\ si\ x\neq 3\ et\ g(3)=l$

a- Déterminer D_g le domaine de définition de g.

b- Pour quelle valeur de l g est-elle continue en 3 ?

B. Soit $h(x)=\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

1. Calculer la limite de h en 1.
2. En déduire une fonction k prolongement par continuité de h en 1.
3. Dans chacun des cas suivants démontrer que f est continue sur son ensemble de définition :

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$; $f(x)=|2x-5|$

$f(x)=\frac{sinx+1}{sin^2x+1}$; $f(x)=\sqrt{tan^2x+1}$

4. Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases}\varphi(x)=\sqrt{-x-1}\ si\ x\ \in\ ]-\infty;-1]\\ \varphi(x)=x^2-1\ si\ [-1;1]\\ \varphi(x)=2sin(x-1)\ si\ x\in\ ]1;\ +\infty[\end{cases}$$

a- Etudiez la continuité de φ en -1 et en 1

b- Etudiez la dérivabilité de φ en -1 et en 1

c- Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels φ est dérivable.

EXERCICE 5 :

1. Dans chacun des cas suivants déterminer les trois premières dérivées de la fonction f.

$f(x)=2x^5-7x^3-9$; $g(x)=(-x^4+3)^7$; $h(x)=\frac{2-3x}{x^2-2}$; $k(x)=x\sqrt{x}$; $p(x)=cosx$;

2. Déterminer une primitive F de la fonction f sur intervalle I à préciser dans les cas suivants :

$f(x) = 9x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $f(x) = 9x^2(4-x^3)^8$, $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}$

$f(x) = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$; $f(x) = \frac{x^4-x^3+2x^2+1}{x^2(x^2+1)^2}$; $f(x) = \frac{sinx}{cos^2x}$

$f(x) = cos^3x - cos2x$; $f(x) = 9cos^4x + sinxcosx$

PROBLEME 1 :

Soit la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$

Partie A :

1. Déterminer le domaine de définition de f : On le notera D_f.
2. Montrer que, pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) > 0$.
3. Etudier la parité de f. Que peut-on conclure pour la courbe de f dans un repère orthonormé.
4. Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe pour $x > 1$. En déduire le tableau de variation de f pour $x > 1$. Construire la courbe.

Partie B :

La fonction numérique g est définie par :

$g(x) = x\sqrt{x^2-1}$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Etudier la parité de g.
3. Trouver les coordonnées des points d''intersections de (D) d''équation : $y = x$ et de la courbe de g.
4. Calculer $g'(x)$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ de la partie A.
5. Soit h la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $h(x) = g(x)$.

a- Donner le tableau de variation de h.

b- Montrer que h est une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera.

c- Tracer la courbe représentative de h.

d- Tracer la courbe représentative de h^{-1} dans un même repère.

PROBLEME 2 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-2)}{x-1} \ si\ x < 0 \\ x + \sqrt{|x^2-x|} \ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité de f en 0.
3. Etudier la dérivabilité de f en 0 et 1. Que peut-on conclure pour C_f en ces points 0 et 1.
4. Montrer que f est dérivable sur R $-\{0,1\}$ et calculer $f'(x)$ dans les intervalles ou f est dérivable.
5. Résoudre $]0,1[$ l'inéquation $2\sqrt{x-x^2}+1-2x \leq 0$. En déduire le signe de f' sur $]0,1[$ puis étudier son signe sur les autres intervalles. Dresser le tableau de variation de f.
6. Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$. Etudier la position relative de C_f et Δ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
7. Montrer que C_f admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$. Etudier la position relative de C_f et D sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.
8. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1,+\infty[$.

a- Monter que g définit une bijection de $I =]1,+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

b- La bijection réciproque g^{-1} est - elle dérivable sur J ? Calculer $g^{-1}(2)$

c- Expliciter $g^{-1}(x)$pour $x \in J$.

PROBLEME 3 :

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 + tanx \ si -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2+4} \ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
2. Déterminer les limites de f en $-\frac{\pi}{2}$ et en $+\infty$
3. En déduire les branches infinies
4. Etudier les variations de la fonction f
5. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ solution de l'équation $f(x) = 0$
6. Montrer que : $-\frac{\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{4}$.
7. Tracer la courbe de f dans un repère $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$
8. Soit g la restriction de f sur $[0; +\infty[$

a- Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1}dont on précisera l'ensemble de définition et ses propriétés (continuité, dérivabilité, variation)

b- Calculer $(g^{-1})'(2)$ puis déterminer l'équation de la tangente à $C_{g^{-1}}$ en son point d'intersection avec l'axe (ox) des abscisses

c- Expliciter $g^{-1}(x)$. Etudier les branches infinies en $+\infty$. Déduire du tracé de C_g celui de $C_{g^{-1}}$

PROBLEME 4 :

A. Soit f la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$f(x) = \frac{\sin(3x)}{cos^3x}$.

1- Trouver la limite de f en $\frac{\pi}{2}$.

2- Montrer que sur I, $f'(x) = \frac{3\cos(2x)}{cos^4x}$ et en déduire le tableau de variation de f.

3- Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a deux solutions sur I. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de ces solutions.

4- Tracer C_f la courbe de f.

B. Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{sin^2x}{sinx - 1}$.

1- Déterminer D_g et montrer que g est périodique.

2- Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie à C_g courbe de g.

3- Etudier f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

4- Tracer la courbe C_g.