Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Matière : Mathématique	**Fonctions LN et EXPO**	**Professeur** : M. AMAR FALL
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Classe** : TS2

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$\ln(2x-5)+\ln(x+1)=2\ln 2$; $2\ln x+3=0$; $\ln^2 x-2\ln x-3=0$;

$\ln^3 x-\ln x^3=-2$; $\ln x-\ln(2-x)\geq 0$; $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\leq 0$; $\ln^2 x-2\ln x-3>0$;

$\ln^3 x-\ln x^3\leq -2$; $\frac{2e^{3x}-3e^{2x}}{3e^x-2}=1$; $3e^{3x}-12e^{2x}+3e^x+21\leq 3$.

Exercice 2 :

Déterminer D_f dans chacun des cas suivants :

$f(x)=\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$; $f(x)=-2x+1+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$; $f(x)=\frac{\ln x+1}{\ln x-1}$; $f(x)=\frac{e^{2x}+3}{e^x-1}$;

$f(x)=\frac{1}{e^x-e^{2x}}$; $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; $f(x)=\ln(e^x-1)$; $f(x)=x-\ln(1+e^x)$

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants, justifier que f est dérivable sur l'intervalle I donné puis y calculer $f'(x)$.

$f(x)=\ln(x^2-x-2)\ et\ I=\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$; $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\ et\ I=]-\infty;-1[$

$f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\ et\ I=]-1;0]$; $f(x)=(x^2-5x+1)e^{3x-1}\ et\ I=\mathbb{R}$

$f(x)=\ln(1+e^x)\ et\ I=\mathbb{R}$

Exercice 4 :

Groupe Excellence
Excellez avec les meilleurs professeurs !

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I donné.**

$f(x) = \frac{1}{2x-1}$ et $I = [1; +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ et $I =]-\infty; -\frac{3}{2}[$; $f(x) = \frac{ln^5(x)}{x}$ et $I =]0; +\infty[$

$f(x) = e^{-3x+1}$ et $I = \mathbb{R}$; $f(x) = (3x^2 - 1)e^{x^3-x}$ et $I = \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{e^{4x+3}}{e^{4x+3}+1}$ et $I = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{e^{3x}-e^{2x}+e^x}{e^x}$ et $I = \mathbb{R}$

2. Trouver les réels a, b et c tels que $\frac{2x^2-5x+6}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$. En déduire une primitive sur $]1; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2-5x+6}{(x-1)^2}$.

3. $f(x) = \frac{x+\ln|1-x|}{1-x}$.

   a. Montrer que si $x > 1$ alors $f(x) = -1 - \frac{1}{x-1} - \frac{\ln(x-1)}{x-1}$.

   b. En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$

Exercice 5 :

On considère sur $]0; +\infty[$, la fonction g telle que $g(x) = \frac{-2}{1+x^2} + \ln(1 + \frac{1}{x^2})$.

1. Montrer que $D_g =]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.
3. En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Exercice 6 :

$$f(x) = e^x - x$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Donner le signe de $f(x)$ sur R. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$.
3. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

PROBLEME 1 :

www.groupe-excellence.sn

Groupe Excellence
Excellez avec les meilleurs professeurs !

(Bac 2018)

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup[0;+\infty[$ par

$f(x)=\begin{cases}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & si\ x<-1\\ xe^{-2x}+e^{-2x}-x+1 & si\ x\geq 0\end{cases}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1) **a)** Calculer les dérivées f' et f'' de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

b) Etudier les variations de f', puis dresser le tableau de variation de f' sur $[0;+\infty[$.

c) En déduire le signe de f' sur $[0;+\infty[$.

2) Etudier les variations de f sur $]-\infty;-1[$.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α et que $1\leq\alpha\leq 2$.

5) Montrer que la courbe C_f admet une asymptote oblique (D) que l'on déterminera puis étudier la position de (D) par rapport à C_f.

6) Construire les asymptotes, puis C_f.

PROBLEME 2 :

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par $g(x)=2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)$.
2. Montrer que g est dérivable sur $]-\infty;0[$ et que pour tout x $\in]-\infty;0[$, $g'(x)=\frac{x-2}{x(x-1)^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $]-\infty;0[$ puis en déduire le signe de g sur $]-\infty;0[$.

Partie B : Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}x^2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & \text{si } x<0\\ xe^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

1. **a.** Montrer que $D_f=\mathbb{R}$.

www.groupe-excellence.sn

Groupe Excellence
Excellez avec les meilleurs professeurs !

b. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

c. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2. **a**. Montrer que sur $]-\infty; 0[$, $f'(x) = xg(x)$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty; 0[$.

b. Calculer $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ puis y étudier son signe.

c. Dresser le tableau de variations de f.

3. On admet que pour tout $x \in]-\infty; 0[$,on a : $-x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1-x) \leq -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ et on pose $X = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$.

a. Montrer que pour tout x $\in]-\infty; 0[$, $f(x) + x = \frac{\ln(1-X)+X}{X^2}$.

b. En déduire que la droite $(\Delta): y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.

c. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

a. Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b. Soit h^{-1} sa bijection réciproque.

a. Calculer $h(1)$. h^{-1} est-elle dérivable en e^{-1} ?

b. Montrer que h^{-1} est dérivable en $y_0 = 2e^{-2}$ puis calculer $(h^{-1})'(y_0)$.

c. Construire dans le même repère $(C_{h^{-1}})$.

PROBLEME 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x + 1 - \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x < 0 \\ (1+x)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1. **a.** Justifier que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

c. Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

2. **a.** Etudier la continuité de f en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.

3. **a.** Etudier les variations de f dans D_f.

www.groupe-excellence.sn

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

b. Dresser le tableau de variations de f.

4. **a.** Montrer que la droite (D): $y = x + 1$ est une asymptote à C_f en $-\infty$.

b. Etudier la position de (C_f) par rapport à (D).

5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-1; 0]$.

a. Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1; 0]$.

c. Vérifier que $-0{,}4 < \alpha < -0{,}3$.

6. Tracer les asymptotes de C_f puis C_f et enfin la courbe de h^{-1} dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm. On prendra $\alpha = -0{,}4$.

Pensée :

Plus tu agis avec intelligence, mieux tu as de la chance. Si tu veux faire la différence alors tu dois parler avec aisance, agir avec déférence et te comporter comme une référence. L'essence de la vie, ce n'est pas la vengeance, ni les revanches mais c'est d'accomplir des œuvres immenses avant de tirer sa révérence. L'extravagance, l'ambiance, les manigances, la répugnance et la danse n'ont pas beaucoup d'importance et révèlent de l'incompétence. C'est une évidence qu'après la naissance, c'est l'enfance puis l'adolescence. Commence par résorber tes carences puis accélère ta cadence si tu veux prendre de l'avance. N'oublie pas que le silence fait aussi parti de l'éloquence. Réclame toujours ton indépendance si tu veux une bonne existence. Si tu veux entendre un jour son excellence alors il faut toujours t'adonner à une réflexion dense .

www.groupe-excellence.sn