

TS2 : LES SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 1 :

1. Démontrer par récurrence les assertions suivantes : n est un entier naturel
 - a- $n^2 - n$ est divisible par 2
 - b- $n^3 - n$ est divisible par 3
 - c- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2^n > n$
 - d- Pour tout $n \geq 1$, on a $2^{n-1} \leq n!$
 - e- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
 - f- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 - g- Pour n entier non nul, $\sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
 - a- Calculer les trois premiers termes de cette suite
 - b- Démontrer que pour tout n , $0 \leq u_n \leq 2$
 - c- Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\begin{cases} v_1 = 3 \\ 3v_{n+1} = v_n + 12 \end{cases}$
 - a- Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3 \leq v_n \leq 6$
 - b- Etudier le sens de variation de cette suite.
 - c- Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq n_0$, on a : $v_n = \frac{1}{3^{n-2}} + 6$

Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $6 - v_n < 10^{-6}$

EXERCICE 2 :

1. u_1, u_n et S_n désignent respectivement le premier terme, le terme général et la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison r . Calculer :
 - a- u_n et S_n sachant que $u_1 = 7, n = 120$ et $r = 5$
 - b- u_1 et S_n sachant que $u_n = 326, n = 72$ et $r = 2$
 - c- r et S_n sachant que $u_1 = 397, u_n = 64, n = 1000$
 - d- n et u_n sachant que $u_1 = 50, r = -4, S_n = 330$
2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{1 - 2v_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 - a- Calculer les valeurs de v_1 et v_2
 - b- La suite (v_n) est-elle arithmétique ?

Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = \frac{1}{v_n}$

 - c- Calculer w_0 et w_1 .
 - d- Montrer que (w_n) est arithmétique et préciser sa raison r
 - e- Exprimer w_n en puis v_n en fonction de n
 - f- Exprimer alors $\sum_{k=0}^n w_k$ puis $\sum_{k=0}^n v_k$ en fonction de n

EXERCICE 3 :

- A. Soit (v_n) la suite arithmétique telle que : $v_{12} = 9$ et $v_{19} = 23$
 1. Calculer la raison r de cette suite
 2. Donner la valeur du premier terme v_0
 3. Exprimer v_n en fonction de n
 4. En déduire la somme $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ en fonction de n
- B. En l'an 2010, une entreprise a décidé de verser une prime annuelle à chacun de ses employés. Cette prime augmente de 5000F chaque année. La prime initiale est $U_1 = 50\,000F$ et on note U_n la prime individuelle versée la n ème année.
 1. Calculer U_2 et U_3 .
 2. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n . En déduire la nature de la suite (U_n) .
 3. Ecrire U_n en fonction de n .
 4. En quelle année la prime atteindra-t-elle la somme de 145 000F ?
 5. Déterminer le montant total des primes que percevrait un employé de 2010 à 2029

EXERCICE 4 :

- A. v_1, v_n et S_n désignent respectivement le premier terme, le terme général et la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q . Calculer
 1. v_n et S_n sachant que $v_1 = 2, q = 3$ et $n = 5$
 2. q et S_n sachant que $v_1 = 162, v_n = 32, n = 5$
 3. v_1 et v_n sachant que $q = \frac{1}{2}, n = 7, S_n = 571,5$
- B. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$$
 1. Calculer u_1, u_2 et u_3
 2. On considère la suite $w_n = u_n - 4$
 - a- Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme.
 - b- Exprimer w_n puis u_n en fonction de n
 - c- Calculer alors les sommes S_n et C_n définies par : $S_n = \sum_{k=0}^n w_k$ et $C_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n

EXERCICE 5 :

- A. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 1$ telle que : $\begin{cases} u_1 \times u_2 \times u_3 = 144 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases}$
 1. Déterminer les valeurs de u_1, u_2 et u_3
 2. Exprimer u_n en fonction de n
 3. Exprimer la somme $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ en fonction de n
- B. On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1; v_1 = 3 \\ v_{n+2} = \frac{1}{2}a^2v_{n+1} + (a-3)v_n \text{ si } n \in \mathbb{N} \text{ et } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On considère la suite (w_n) définie pour tout n

par : $w_n = v_{n+1} - v_n$

1. On pose dans cette question $a = 1$
 - a- Démontrer que la suite (w_n) est constante.
 - b- En déduire alors que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
 - c- Exprimer en fonction de n , v_n et $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$
 - d- Calculer la somme des entiers naturels impairs et inférieurs à 100
2. On pose maintenant $a = 2$
 - a- Vérifier que la suite (w_n) est géométrique exprimer w_n en fonction de n
 - b- Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n w_k$ en fonction de n
 - c- Démontrer que cette somme $S_n = v_{n+1} - 1$

EXERCICE 6 :

1. Calculer les limites des suites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n+2}; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{3n+2}; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2-n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 2n^2 + 1); \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right); \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{|-n-1|}}; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-1}{|-n+2|}; \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n+4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right); \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3+2^n}; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{(-5)^{n+1}}; \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sin n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = \frac{n!}{3^n}$, pour tout entier $n \geq 0$

- a- Montrer que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geq \frac{4}{3}$ pour tout $n \geq 3$
- b- En déduire que $w_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} w_3$ pour tout $n \geq 3$
- c- En déduire la limite de la suite (w_n)

3. On considère la suite réelle u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$
- b- Montrer que u est croissante sur $\mathbb{N}$
Soit pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \alpha$
- c- Déterminer α pour que la suite (v_n) soit géométrique et préciser sa raison.
- d- Exprimer u_n en fonction de n
- e- Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- f- Soit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Exprimer S_n en fonction de n

EXERCICE 7 :

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+8}{2u_n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Donner les valeurs de u_1 et u_2
2. Soit h la suite définie sur $[0; 5]$ par : $h(x) = \frac{x+8}{2x+1}$

- a- Etudier les variations de la fonction h
- b- Résoudre l'équation $h(x) = x$
- c- Tracer la courbe (H) représentative de h et la droite $(\Delta): y = x$ dans un repère d'unité $2cm$
3. Construire à l'aide (H) et (Δ) les points de $(O, \vec{i})$ d'abscisses u_1, u_2 et u_3 .
4. Que peut-on conjecturer sur la monotonie et la convergence de cette suite.
5. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, 1 \leq u_n \leq 4$
6. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$
 - a- Calculer les valeurs de v_0 et v_1
 - b- Démontrer que (v_n) est géométrique et caractériser cette suite.
 - c- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - d- Calculer alors la limite de la suite u_n

EXERCICE 8 :

1. Soit la fonction $f: x \rightarrow f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$
 - a- Etudier les variations de f .
 - b- Résoudre dans $\mathbb{R}: f(x) = x$.
 - c- Montrer que si : $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ alors $1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$
2. Soit la suite réelle U_n définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 - a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.
 - b- Etudier la monotonie de U_n .
 - c- Montrer que U_n est convergente et calculer sa limite.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose : $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$
 - a- Montrer que V_n est une suite géométrique
 - b- En déduire l'expression de U_n .
 - c- Retrouver la limite de U_n .
4. On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$
 - a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*: n \leq S_n \leq 3n$.
 - b- En déduire la limite de S_n et celle de $\frac{S_n}{n^2}$
5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*: r_n = \frac{S_n}{n}$
 - a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$nS_{n+1} - (n+1)S_{n+1} = nU_n^2 - S_n$$
 - b- En déduire (r_n) est une suite croissante.
 - c- Montrer que (r_n) est une suite convergente et trouver la limite l .
6. Soit n de $\mathbb{N}^*$ tel que $n > p$.
 - a- Montrer que $(n-p)U_p^2 \leq S_n \leq nU_{n-1}^2$.
 - b- En déduire que : $\frac{n-p}{n} \leq r_n \leq U_{n-1}^2$
 - c- Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*: U_p^2 < l < 3$.
En déduire la valeur de l .