TS2 : COMPLEXE ET GEOMETRIE

EXERCICE 1 :

A. On considère les complexes :

$z_1(1-i)(1+2i)$; $z_2=\frac{2+6i}{3-i}$; $z_3=\frac{4i}{i-1}$

M_1, M_2 et M_3 leurs images respectives dans le repère complexe $(O,\vec{u},\vec{v})$

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de ces complexes.
2. Placer les points M_1, M_2 et M_3
3. Calculer $\frac{z_3\ -\ z_1}{z_2\ -\ z_1}$. En déduire que le triangle $M_1\ M_2M_3$ est rectangle isocèle.
4. Construire M_4 tel que $M_1\ M_2M_3M_4$ soit un carré et trouver son affixe z_4

B. Soit z un nombre complexe différent de 1. On pose

$Z_1=\frac{2iz-1}{z\ -\ 1}$, $Z_2=\frac{z-3+1}{2i-z}$ (avec $z\neq 2i$)

On note $z=x+iy$, $Z_1=X_1+iY_1$ et $Z_2=X_2+iY_2$.

1. Exprimer X_1 et Y_1 en fonction de x et y.
2. Faire de même pour X_2 et Y_2
3. M est le point d'affixe z. Trouver

a- l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que Z_1 soit un réel.

b- l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M tels que Z_1 soit un imaginaire pure.

c- l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M tels que $|Z_1|=2$

4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{H}$ des points $M(z)$ tels que Z_2 soit un réel.
5. Déterminer l'ensemble $\mathscr{I}$ des points $M(z)$ tels que $arg(Z_2)=\frac{3\pi}{2}[2\pi]$

Dessiner $\mathscr{E}, \mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}$ et $\mathscr{I}$ dans un même repère.

EXERCICE 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

$z^2-2z+5=0$ et $z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0$

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs : $z_A=1+2i, z_B=1+\sqrt{3}+i, z_C=1+\sqrt{3}-i$ et $z_D=1-2i$

a- Placer A, B, C et D dans le plan (P).

b- Vérifier que $\frac{z_D\ -\ z_B}{z_A\ -\ z_B}=i\sqrt{3}$. En déduire la nature du triangle ABD.

c- Montrer que A, B, C et D appartiennent à un même cercle ζ dont on précisera le centre et calculera le rayon.

3. On considère (E) :

$z^2-2(1+2cos\theta)z+5+4cos\theta=0$

a. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

b. Montrer les points images des solutions de (E) appartiennent à ζ

4. Soit un nombre réel θ

a- Exprimer $1-2cos\theta$ en fonction de $sin\theta$ et exprimer $sin2\theta$ en fonction de $sin\theta$ et $cos\theta$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2(1-cos2\theta)2zsin2\theta+1=0$ dans la quelle z est l'inconnue et θ est un paramètre réel tel que $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ et $\theta\neq 0$

c- Déterminer un module et un argument de chacun de racines z_1 et z_2.

d- On désigne par M_1 et M_2 les images de z_1 et z_2 dans le plan rapporte au repère orthonormé$(O,\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$.

e- Déterminer θ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle et rectangle en O.

EXERCICE 3 :

1. Caractériser les applications f du plan dans lui-même qui, à tout point $M(z)$, associent le point $M'(z')$ telles que :

$z'=(1-i)z+2-i$; $z'=iz+1+2i$

$z'=-3z+6i$; $z'=z-1+i$

2. Donner l'écriture complexe de la transformation h dans chaque cas:

a- h est la similitude plane directe de centre $O(0\,;0)$, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et rapport 2.

b- h est la similitude plane directe de centre $I(2i)$, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

c- h est l'homothétie de centre $I(1+i)$ et de rapport -2.

d- h est la translation de vecteur $\vec{u}(1+2i)$.

e- h est la rotation de centre $I(2-i)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, on considère l'application g qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z'=u^2z+z-1 \quad \text{où } u\in\mathbb{C}.$$

a- Déterminer l'ensemble des complexes u pour lesquels g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b- Déterminer u pour lesquels g est une translation.

c- Déterminer u pour lesquels g est une homothétie de rapport -2

d- Caractériser g lorsque $u=1-i$

EXERCICE 4 :

A. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par$z'=\frac{3\ +\ i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1\ -\ i\sqrt{3}}{2}$.

On note A le point d'affixe 2.

1. Déterminer l'affixe de A' image de A.
2. Déterminer l'affixe du point P tel que $f(P)=O$.
3. Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.
4. Lorsque le point M est distinct de A.

a. Démontrer que le triangle AMM' est rectangle en M

b. Le point M et le milieu du segment $[AM]$ étant donnés. Déduire une construction au compas du point M' image de M.

B. Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points $E(1+2i)$, $F(-2+i)$ et $\Omega(2-i)$.

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe S_1 de centre Ω qui transforme E en F.
2. Soit S_2 la transformation plane qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ telle que $z' = \left(\frac{1+i}{2}\right)z + \frac{1-3i}{2}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de S_2.
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S = S_1 o S_2$
4. Soit T la transformation plane qui à $M(z = x + iy)$ associe $M'(z' = x' + iy')$ définie par $\begin{cases} x^2 = x + y\sqrt{3} - 1 \\ y' = -x\sqrt{3} + y + 1 \end{cases}$
   Exprimer z' en fonction de z puis donner la nature de la transformation T.
5. Soit T_2 la transformation qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ telle que $z' = \alpha^2 z + \beta$.
6. Déterminer les complexes α et β pour que $S_2 o T_2$ soit une translation de vecteur $\vec{u}(1; 0)$

EXERCICE 5 :

A. Le plan P est muni d'un repère complexe orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit s la similitude directe de centre Ω d'affixe 1 qui transforme le point A d'affixe i en l'origine O du repère précédent.

a. Déterminer le rapport et l'angle de s.

b. En déduire l'écriture complexe de s.

2. Soit (z_n) la suite des nombres complexes définie par : $\begin{cases} z_0 = 5 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n + \frac{1-i}{2} \end{cases}$
   On note M_n le point d'affixe z_n et on pose $Z_n = z_n - 1$.

a. Construire les points $M_0;\ M_1, \dots, M_6$.

b. Prouver que (z_n) est une suite géométrique.

c. Exprimer Z_n, puis z_n en fonction de n.

d. Prouver que : $M_n M_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-3}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

e. Calculer la longueur L_n de la ligne polygonale $M_0 M_1 M_2 \dots M_{n+1}$ ainsi que sa limite lors que n tend vers $+\infty$.

B. Soit Ω et B deux points du plan orienté, distants de $a(a > 0)$. Soit S la similitude de centre Ω, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On construit la suite (B_n) de la façon suivante :

$B_0 = B$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = S(B_n)$.

1. Construisez les points B_n pour $n = 0; 1; 2; 3; 4; 5$.
2. Démontrer que la suite $(B_n B_{n+1})$ est une suite géométrique.
3. Soit S_n la somme des longueurs $B_p B_{p+1}$; p variant dans $\mathbb{N}$ de 0 à n, donc $S_n = \sum_{p=0}^{n} B_p B_{p+1}$.

a- Calculer S_n en fonction de l'entier naturel n et du nombre réel a.

b- Démontrer que la suite (S_n) est croissante et convergente. Quelle est sa limite ?

EXERCICE 6 :

A. Pour tout complexe z, on note $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$

1. Déterminer le polynôme Q tel que $\forall\, z \in \mathbb{C}: f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$
2. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : f(z) = 0$.
3. Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique puis représenter les dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

B. On considère les points A, B, C et D du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$A\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B(-1+i), C(-1-i)$ et $D\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

1. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. Soit r la rotation de centre le point Ω d'affixe 1 et qui transforme A en D.
   Déterminer l'écriture complexe de r
3. Quelle est la nature du triangle ΩAD ?
4. Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ΩAD.
5. On pose $u_n = (z_A)^n, n \in \mathbb{N}^*$ où z_A est l'affixe du point A. Déterminer la valeur minimal de n pour laquelle u_n est un réel.
6. Donner la forme algébrique de u_{2019}

C. Soit k un réel strictement positif
A tout point M d'affixe z on fait correspondre par la transformation t_k le point M' d'affixe z' tel que : $z' = kiz + 1 + k^2$

1. Quelle est la nature de la transformation t_k ? Préciser ses éléments caractéristiques
2. Si on désigne par Ω_k le centre de la similitude t_k, déterminer l'ensemble des points Ω_k lorsque k décrit l'ensemble des réels strictement positifs.
3. Soit k et k' deux réels strictement positifs ; démontrer que $t_k o t_{k'}$ si et seulement si $k = k'$
4. Quelle est la nature de la transformation t_k ?