PRIMITIVES

1 Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, déterminer l'ensemble de ses primitives sur l'intervalle I indiqué.

$a(x) = (-2x+1)^5, \quad I = \mathbb{R}.$

$b(x) = \dfrac{3x^2+4x-2}{x^4}, \quad I =]-\infty; 0[.$

$c(x) = \dfrac{1}{(-4x+3)^3}, \quad I = \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[.$

$d(x) = \dfrac{5t+5}{\sqrt{t^2+2t+3}}, \quad I = \mathbb{R}.$

$e(x) = (2-t^2)(t^3-6t)^2, \quad I = \mathbb{R}.$

$f(x) = \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}, \quad I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$

$g(x) = \left(\dfrac{2x}{x^4+1}\right)^3, \quad I = \mathbb{R}.$

$h(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}, \quad I =]0; +\infty[.$

$i(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}, \quad I =]0; \pi[.$

$j(x) = \tan^2 x, \quad I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$

$k(x) = \sqrt[3]{8x-1}, \quad I = \left[\frac{1}{8}; +\infty\right[.$

$l(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}, \quad I =]0; +\infty[.$

$m(x) = \left(x+\dfrac{1}{3}\right)(3x^2+2x)^4, \quad I = \mathbb{R}.$

$n(x) = \dfrac{2\sin x}{(4\cos x+7)^3}, \quad I = \mathbb{R}.$

$o(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \quad I =]0; +\infty[.$

2 Pour tout $k > 1$, déterminer les primitives sur $]1; +\infty[$ des fonctions $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^k}$ et $g_k : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^k}$.

3 Dans chacun des cas suivants, justifier que f admet des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F vérifiant $f(x_0) = y_0$.

1) $f(x) = \tan x + \tan^3 x$, $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

2) $f(x) = \sin x - \sin^3 x$, $I = \mathbb{R}$ $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

3) $f(x) = \dfrac{1+\tan x}{\cos^2 x}$, $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

4 Soit $f(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{x^5+x^3}$

1) Trouver les réels a et b tels que : $f(x) = \dfrac{a}{x^3} + \dfrac{bx}{x^2+1}$.

2) En déduire les primitives de f sur $]0; +\infty[$.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \sin^3 x$.

1) Caculer $f'(x)$, $f''(x)$ et déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + af(x) = b\sin x$

2) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x$.

1) Déterminer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\sin x$.

2) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

7 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x\cos(3x)$ et $g(x) = \sin x\sin(3x)$.

1) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f+g$ et $f-g$.

2) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g.

3) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π de la fonction h définie par $h(x) = (1+\cos x)\sin(4x)$.

8 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \cos^4 x$ $\qquad f_2 : x \mapsto \sin^4 x$

$f_3 : x \mapsto \cos^4 x\sin^2 x$ $\qquad f_4 : x \mapsto \sin^3 x\cos^2 x$

$f_5 : x \mapsto \cos^3 x\sin^4(2x)$ $\qquad f_6 : x \mapsto \sin^4 x\cos^5 x$

9 Soit f et g les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ et $g(x) = |x| + |x-1|$.

1) Montrer que f et g admettent des primitives sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 4.

3) Déterminer une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

10 Les questions sont indépendantes.

1) Déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que :

a) $f''(x) = 0$;

b) $f''(x) = sinx$.

2) Trouver une fonction polynôme de degré 4 dont la courbe admet des points d'inflexion aux points d'abscisse $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

11 Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1+\sin x} + \frac{b\cos x}{1-\sin x}$. En déduire une primitive de la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.

12 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x \sin 2x$.

1) À l'aide des formules d'Euler, démontrer que : $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$.
2) En déduire la primitive F de f telle que $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.
3) Pour p et q tels que $(p-q)(p+q) \neq 0$, calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions $f\colon x \mapsto \cos px \cos qx$, $g\colon x \mapsto \sin px \sin qx$ et $h\colon x \mapsto \cos px \sin qx$

13 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x+x^2}.$$

1) a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, $\frac{2}{3} \leq f(t) \leq 1$.
2) Soit F la primitive de f sur $[0; +\infty[$ qui s'annule en 0.
   a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.
   b) En déduire la limite de F en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de F.
   d) Montrer que l'équation $F(x) = 1$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$ et que $1 \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$.
3) Soit G la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $G(x) = F(x^2)$. Montrer que G est dérivable sur $[0; +\infty[$ et étudier ses variations.

14 Déterminer une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{3+x}{2x}}$, $I =]0; +\infty[$;

$f_2(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}}$, $I =]0; +\infty[$;

$f_3(x) = \sqrt{x^4 + x^2}$, $I = \mathbb{R}$;

$f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$, $I =]0; \frac{\pi}{2}[$.