CSPA **Année scolaire 2023 – 2024**

SUITES NUMERIQUES

Cellule de mathématiques **Classe : TS_2**

AMADOU LAMINE NDIAYE

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{4}{u_n - 6} \end{cases}$

1 **a** Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

b Vérifier que pour tout entier non nul $n : u_n < 4$.

c Montrer que pour tout entier non nul n : $u_{n+1} > u_n$ et en déduire un encadrement de u_n.

2 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 4}$

a Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \end{cases}$

1 On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. La suite v_n est-elle géométrique ?

2 Soit $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

a Calculer S_n en fonction de n.

b Montrer que $S_n = u_{n+1} - u_0$

c En déduire l'expression de u_{n+1} puis celle de u_n en fonction de n.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + {u_n}^2} \end{cases}$

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.

2 **a** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$.

b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3 Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4 Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a Montrer que (S_n) est croissante.

b Montrer que $S_n \leqslant 2\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

c En déduire que (S_n) est convergente vers un réel $l \in [1, 2]$

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + 2} \end{cases}$

1 Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2 Etudier la monotonie de (u_n).

3 On pose $v_n = {u_n}^2$

a Prouver que (v_n) est une suite arithmétique.

b Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

4 Etudier la convergence de (u_n)

Exercice 5

Soit u et v les suites numériques définies par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - n - \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + an + b$ avec a et b des nombres réels.

1 Déterminer les nombres réels a et b sachant que la suite (v_n) est géométrique.

2 En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

3 On pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calculer S_n et T_n

Exercice 6

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{2} \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) \end{cases}$

1 Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n < 3$.

2 **a** Justifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n)$.

b Etudier la monotonie de (u_n)

c Montrer que (u_n) est convergente.

3 On pose $v_n = n(3 - u_n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$

a Prouver que (v_n) est une suite géométrique.

b Calculer v_n en fonction de n.

c En déduire le terme général de (u_n).

d Calculer ainsi la limite de (u_n).

Exercice 7 On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$

1 Calculer u_1 et v_1

2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = u_n - v_n$

a Prouver que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$

3 **a** Etudier la monotonie de chacune des suites (u_n) et (v_n).

b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ et $v_n \leqslant 2$.

c Justifier que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = u_n + v_n$

a Prouver que (a_n) est une suite constante.

b Calculer alors l.

5 Exprimer en fonction de n, le terme général de (u_n) et de (v_n).

Exercice 8 On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$ $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

1 Démontrer que $0 < u_n < v_n$

2 **a** Démontrer que (u_n) est une suite croissante et que (v_n) est une suite décroissante.

b Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes vers la même limite l.

3 **a** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n v_n = 2$.

b En déduire la valeur de l

Exercice 9

1 On définit la fonction g sur $I = [1;2]$ par $g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a Montrer que $g(\alpha) = \alpha$

b Montrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$

c En déduire que pour tout $x \in I$, $|g(x) - g(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$

2 Soit (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{w_n}} \end{cases}$
Démontrer que :

a $w_n \geqslant 1$

b $|w_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|w_n - \alpha|$

c $|w_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |w_0 - \alpha|$. En déduire la limite de w_n

Exercice 10

1 Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

a Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$ et que $\alpha \in]0,6;0,7[$

b Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

2 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{4}|u_n - \alpha|$

c En déduire que $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$

d Déterminer la limite de la suite (u_n)

e Montrer que $\alpha = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$

Exercice 11 Soit h la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

1 Etudier les variations de h.

2 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

a Montrer que $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

b En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

c Montrer que pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$

d Démontrer que $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$

e En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - 1| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_n - 1|$

f Retrouver la limite de la suite (u_n)