AMADOU LAMINE NDIAYE

CSPA — **Année scolaire 2023 – 2024**

SIMILITUDES PLANES DIRECTES

Cellule de mathématiques — **Classe : TS_2**

☞ Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

1. $z' = (\sqrt{3} + i)z$
2. $z' = (\sqrt{3} - i)z + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$
3. $z' = -2z + i$
4. $z' = -iz + 1 - 2i$

☞ Exercice 2

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture complexe de f.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

☞ Exercice 3

Soit S la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que
$z' = (i - \sqrt{3})z + 3 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} + 1)$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.
2. Déterminer l'expression analytique de S.
3. Déterminer l'image par S de la droite passant par le point $A(1 - 2\sqrt{3}; 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(\sqrt{3}; 1)$

☞ Exercice 4

Soit S la similitude directe d'écriture complexe
$z' = (1 + i)z + 2$

1. Déterminer les éléments caractéristiques de S.
2. Soit Ω le centre de S. Quelle est la nature du triangle $M\Omega M'$ où M' est l'image de M par S.
3. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $OM = OM'$
4. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0$

☞ Exercice 5

On considère les points A_1 ; A_2 et A_3 d'affixes respectives $z_1 = 1$; $z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_3 = \dfrac{5 + i\sqrt{3}}{4}$.

1.
   - **a** Donner une écriture complexe des nombres $z_2 - z_1$ et $z_3 - z_1$.
   - **b** Donner une écriture algébrique et une écriture trigonométrique de $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.
   - **c** En déduire les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{\pi}{12})$
2. Soit S la similitude directe transformant A_2 en A_3 et laissant A_1 invariant.
   - **a** Préciser les éléments caractéristiques de S.
   - **b** On désigne par M' le point d'affixe z' et image par S de M d'affixe z. Exprimer z' en fonction de z.
   - **c** En déduire l'image par S du point B d'affixe $1 - 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

☞ Exercice 6

1. On considère l'équation
   $(E) : z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$
   - **a** Déterminer une solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E).
   - **b** Achever la résolution de l'équation (E)
2. Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   On considère les points $A; B$ et C d'affixes respectives $3i; 3 + 3i$ et $3 - 2i$.
   - **a** Placer les points $A; B$ et C dans le repère.
   - **b** Calculer $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature du triangle ABC.
3. Soit f la similitude directe qui laisse invariant B et qui transforme A en C.
   - **a** Donner une écriture complexe de f.
   - **b** Donner les éléments caractéristiques de l'application f.

☞ Exercice 7

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe z associe le complexe z' défini par
$z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$.

1 Montrer que le nombre complexe $\omega = 1+i$ est invariant par f.

2 Montrer que $z-\omega = (1+i\sqrt{3})(z-\omega)$.

3 Soit $M; M'$ et Ω les points d'affixes respectives $z; z'$ et ω.

- **a** Calculer le module et un argument de $\dfrac{z-\omega}{z'-\omega}$.
- **b** Montrer que M' est l'image de M par la composée d'une rotation dont on précisera le centre et l'angle, et d'une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
- **c** Faire une figure représentant les points Ω; M et M'.
- **d** Montrer géométriquement que le triangle $\Omega MM'$ est un triangle rectangle.

4 Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\left(\dfrac{z-\omega}{z'-\omega}\right)^n$, où n est un entier naturel.

☞ Exercice 8

Considérons les points $A; B; C$ et D du plan tels que $A(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}); B(-1+i); C(-1-i)$ et $D(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$

1 Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2 Soit r la rotation de centre le point Ω d'affixe 1 qui transforme A en D.
Déterminer l'écriture complexe de r.

3 Quelle est la nature du triangle ΩAD ?

4 Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD.

5 On pose $u_n = (z_A)^n, n \in \mathbb{N}^\star$ où z_A est l'affixe du point A.
Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle u_n est un réel.

6 Donner la forme algébrique de u_{2019}

☞ Exercice 9

Dans le plan P muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application f de P dans P qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$$
On pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$

1
- **a** Exprimer z' en fonction de z.
- **b** En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2 Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère l'application g_λ de P dans P définie par son écriture complexe : $z' = (1-\lambda^2)z + \lambda$

- **a** Donner l'écriture complexe de l'application $g_\lambda \circ f$.
- **b** Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $g_\lambda \circ f$ soit une translation. Déterminer pour chaque valeur de λ le vecteur de la translation.

☞ Exercice 10

Soient les équations $(E) : z^4 = -7+24i$ et
$(E') : z^4 = 1$

1 Montrer que $\alpha_0 = 2+i$ est une solution de (E).

2 Résoudre (E').

3 Montrer que z est solution de (E) si et seulement si $\dfrac{z}{\alpha_0}$ est solution de (E').

4 En déduire les solutions algébriques de (E).

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient $A(2+i); B(-1+2i); C(-2-i)$ et $D(1-2i)$

- **a** Placer les points A, B, C et D.
- **b** Déterminer l'écriture complexe de la similitude s directe qui laisse invariant A et qui transforme B en C.
- **c** Déterminer les éléments caractéristiques de s.
- **d** Montrer que $s(O) = D$.
- **e** Donner l'écriture analytique de s.
- **f** En déduire l'équation de (D') image de (D) : $y - 2x + 3 = 0$
- **g** Déterminer l'équation du cercle (C') image par s du cercle (C) de centre O et de rayon 2.

6 Soit T une transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$ avec
$a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

- **a** Quelle est la nature de T ?
- **b** Donner l'écriture complexe de s
- **c** Déterminer a et b pour que s soit la translation de vecteur $\vec{u}(2-i)$
- **d** Déterminer a et b pour que s soit l'homothétie de rapport -2 et de centre A.
- **e** Déterminer a et b pour que s soit la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre B.
- **f** Déterminer a et b pour que s soit la similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A.